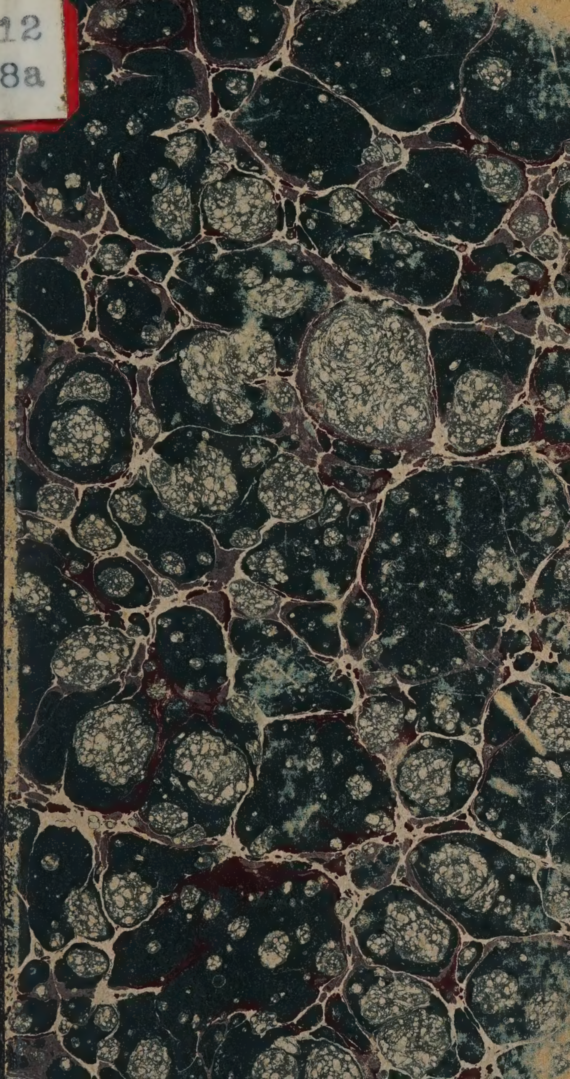
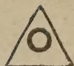


Sammlung Göschen



Arithmetik und Algebra

Von

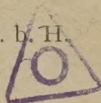
Dr. Hermann Schubert
Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg

Zweite, durchgesehene Auflage

Achter Neudruck



Berlin und Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.
1917.



Plattendruck von Georg Reimer in Berlin W. 10

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Übergang vom Rechnen zur Arithmetik.

§ 1. Arithmetische Bezeichnungen.

Das Zeichen liest man:	$=$ gleich	$>$ größer als	$<$ kleiner als	
Das Zeichen liest man:	$+$ plus	$-$ minus	$\cdot$ mal	$:$ durch
Namen der vier Grundrechnungsarten:	Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division
Beispiel:	$12+4=16$	$12-4=8$	$12\cdot4=48$	$12:4=3$
Die erste Zahl, hier 12, heißt:	Summandus	Minuendus	Faktor	Dividendus
Die zweite Zahl, hier 4, heißt:	Summandus	Subtrahendus	Faktor	Divisor
Namen des Ergebnisses:	Summe	Differenz	Produkt	Quotient

Addition und Subtraktion heißen Rechnungsarten *erster* Stufe. Multiplikation und Division heißen Rechnungsarten *zweiter* Stufe. Bei jeder Rechnungsart

werden zwei Zahlen verknüpft, und durch die Verknüpfung ergibt sich eine dritte Zahl, die, je nach der Rechnungsart, Summe, Differenz, Produkt oder Quotient heißt. Diese dritte Zahl kann auf doppelte Weise dargestellt werden, entweder ausgerechnet, wie in den obigen vier Beispielen 16, 8, 48, 3, oder unausgerechnet, wie $12+4$, $12-4$, $12\cdot 4$, $12:4$. Unausgerechnet dargestellte Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten nennt man Ausdrücke. Zwei Ausdrücke nennt man gleich, wenn sie dieselbe Zahl darstellen, z. B.: $15-9=2\cdot 3$, $17+7=48:2$. Ein Ausdruck heißt größer als ein anderer, wenn er eine größere Zahl darstellt, z. B. $4+7>2\cdot 4$, ein Ausdruck heißt kleiner als ein anderer, wenn er eine kleinere Zahl darstellt, z. B. $3\cdot 7<88:4$. Zwei durch das Gleichheitszeichen verbundene Zahlen oder Ausdrücke bilden eine Gleichung, zwei durch das Größer- oder Kleiner-Zeichen verbundene Zahlen oder Ausdrücke bilden eine Ungleichung.

---

§ 2. Die drei Klammerregeln.

Erste Klammerregel: Soll mit einem **Ausdruck** gerechnet werden, so muß derselbe in eine Klammer eingeschlossen werden, z. B.:

$$(4+9)\cdot 3=13\cdot 3=39,$$
$$4+(9\cdot 3)=4+27=31,$$
$$(10-7)-1=3-1=2,$$
$$10-(7-1)=10-6=4.$$

Zweite Klammerregel: Diese Klammer darf jedoch fortgelassen werden, wenn zwei Rechnungsarten **gleicher Stufe** aufeinander folgen, und die **voranstehende** Rechnungsart zuerst ausgeführt werden soll, z. B.:

$$10 - 8 - 1 = 2 - 1 = 1,$$
$$5 \cdot 9 : 3 = 45 : 3 = 15,$$
$$70 + 11 - 9 = 81 - 9 = 72,$$
$$72 : 12 : 3 = 6 : 3 = 2.$$

Dritte Klammerregel: Die Klammer darf ferner fortgelassen werden, wenn zwei Rechnungsarten **ungleicher Stufe** aufeinander folgen und die Rechnungsart **höherer** Stufe zuerst ausgeführt werden soll, z. B.:

$$5 + 7 \cdot 4 = 5 + 28 = 33,$$
$$20 - 6 : 2 = 20 - 3 = 17,$$
$$8 \cdot 3 + 7 = 24 + 7 = 31,$$
$$70 : 5 - 4 = 14 - 4 = 10.$$

Überflüssig ist demnach eine Klammer nicht nur:

1. um ein einfaches Zahlzeichen, z. B. um (1896),
2. um einen Ausdruck, mit welchem nicht weitergerechnet werden soll, z. B. $(6 + 4)$,

sondern auch:

3. um einen Ausdruck, wenn derselbe erster Teil eines Ausdruckes gleicher Stufe ist, z. B. $(6 + 4) - 7$,
4. um ein Produkt oder einen Quotienten, wenn dieselben Teile einer Summe oder einer Differenz sind, z. B. $5 + (6 \cdot 7)$.

Eine überflüssige Klammer setzt man nur in Fällen, wo es zweckmäßig erscheint, den von der Klammer eingeschlossenen Ausdruck auf diese Weise hervorzuheben.

Vor und nach einer Klammer kann der als Multiplikationszeichen dienende Punkt fortgelassen werden, z. B. $4(3 + 7) = 4 \cdot 10 = 40$, $(11 - 8)5 = 3 \cdot 5 = 15$.

Zusammengesetzt heißt ein Ausdruck, wenn in einem seiner beiden Teile oder auch, wenn in seinen beiden Teilen nicht einfache Zahlzeichen, sondern selbst wieder Ausdrücke stehen, z. B. $10 - (3 + 5)$, $(9 + 5)(3 + 2)$, $7 + 3 - 28 : 7$. Zur Unterscheidung benutzt man bei zusammengesetzten Ausdrücken außer den runden Klammern (. . .) auch eckige Klammern [. . .], größere runde (. .) und wohl auch geschweifte {. . .}, z. B.:

$$4\,[9 - (1 + 3)],\quad 72 : \{43 - [5 + 120\,(2 \cdot 3)]\}.$$

Wegen der drei Klammerregeln hat man für die Berechnung zusammengesetzter Ausdrücke folgende Regeln zu beachten:

1. Die innerhalb einer Klammer angedeutete Rechnung wird immer vor den außerhalb vorgeschriebenen Rechnungen ausgeführt.
2. Zwei gleichstufige Rechnungsarten, die klammerlos aufeinander folgen, werden in der Reihenfolge, wie man liest, von links nach rechts ausgeführt.
3. Von zwei ungleichstufigen Rechnungsarten, die klammerlos aufeinander folgen, wird immer die Rechnungsart höherer Stufe zuerst ausgeführt, selbst wenn sie der Rechnungsart niederer Stufe nachfolgt.

Beispiele.

1. $20 - 5 \cdot (1 + 2) = 20 - 5 \cdot 3 = 20 - 15 = \mathbf{5}$,
2. $(12 + 8 \cdot 7) : (8 + 9) = (12 + 56) : 17 = 68 : 17 = \mathbf{4}$,
3. $[90 - (4 \cdot 6 + 72 : 2)] : 10 = [90 - (24 + 36)] : 10$
   $= [90 - 60] : 10 = 30 : 10 = \mathbf{3}$,
4. $[(24 + 7 + 19) \cdot 2 - 4 \cdot 5 \cdot 2]\,(6 - 4) =$

$$[(31+19)\cdot 2-20\cdot 2]\cdot 2=[50\cdot 2-40]\cdot 2$$
$$=[100-40]\cdot 2=60\cdot 2=\mathbf{120},$$

5. $$\{[(2\cdot 7\cdot 3+8):5-1](2+3)+5-(7+3)\}(7-2\cdot 3)$$
$$=\{[(14\cdot 3+8):5-1]\cdot 5+5-10\}(7-6)$$
$$=\{[50:5-1]\cdot 5+5-10\}\cdot 1$$
$$=\{[10-1]\cdot 5+5-10\}\cdot 1=\{9\cdot 5+5-10\}\cdot 1$$
$$=\{45+5-10\}\cdot 1=\{50-10\}\cdot 1=40\cdot 1=\mathbf{40}.$$

§3. Bedeutung des Buchstabens in der Arithmetik.

Um irgend welche Zahlen zu bezeichnen, gebraucht man in der Arithmetik nicht allein die gewöhnlichen Zahlzeichen, wie 6, 39, 1896, sondern auch Buchstaben, wie a, b, A, x, und zwar meist die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets. *Dabei kann jeder Buchstabe jede beliebige Zahl vertreten, nur daß in einem Ausdruck, in einer Gleichung, in einer Ungleichung oder überhaupt im Laufe einer Rechnung ein und derselbe Buchstabe, wenn er mehrmals auftritt, immer* **nur dieselbe Zahl** *vertreten darf.*

Auch die Buchstaben werden, wie die gewöhnlichen Zahlzeichen, durch die Rechnungsarten zu Ausdrücken verknüpft. So entstehen Buchstaben-Ausdrücke, wie z. B. $a\cdot b+a+b$ oder $8(x+y):4-x$. Dabei kann der als Multiplikationszeichen dienende Punkt sowohl zwischen zwei Buchstaben, wie auch zwischen einer Zahl und einem Buchstaben fortgelassen werden.

Man kann verlangen, daß für die Buchstaben Zahlen eingesetzt werden. Setzt man in einem Ausdruck für *jeden* Buchstaben eine Zahl, so kann man weiter ver-

langen, die entstandenen Zahlenausdrücke auszurechnen. Z. B. der Ausdruck $a(x+a)-x$ gibt für $a=4$, $x=1$ die Zahl 19 und für $a=3$, $x=3$ die Zahl 15, nämlich:

$$a(x+a)-x=4(1+4)-1=4\cdot 5-1=20-1=19,$$
$$a(x+a)-x=3(3+3)-3=3\cdot 6-3=18-3=15.$$

Statt Zahlen an die Stelle von Buchstaben zu setzen, kann man dafür auch Zahlenausdrücke oder neue Buchstaben oder Buchstabenausdrücke einsetzen. Soll z. B. in $a-b$ für a der Ausdruck $5+8$, für b der Ausdruck $9-3$ eingesetzt werden, so entsteht der Ausdruck $(5+8)-(9-3)$ oder $5+8-(9-3)$. Soll $v+w$ für a, $s\cdot t$ für b eingesetzt werden, so entsteht $a-b=v+w-s\cdot t$.

Wenn man an die Stelle eines Buchstabens einen Ausdruck setzt, so achte man darauf, ob derselbe nicht vielleicht nach Vorschrift der Klammerregeln (§ 2) eingeklammert werden muß. Soll z. B. in $a\cdot b$ der Ausdruck $c+d$ für a gesetzt werden, so kommt $(c+d)\,b$.

Als allgemeine Zahlzeichen wendet man oft auch Buchstaben an, denen unten kleiner geschriebene Zahlen, die man dann Indices nennt, oder oben kleine Striche angefügt werden, z. B.:

a_1 (gelesen: a-eins), a_3 (gelesen: a-drei),
a' (gelesen: a-strich), a''' (gelesen: a-dreistrich).

Zwei Buchstabenausdrücke können, ebenso wie zwei Zahlenausdrücke, zu einer Gleichung verbunden werden. Wenn man für jeden in einer Gleichung vorkommenden Buchstaben eine gewisse Zahl einsetzt, und dann jeden von den beiden gleichgesetzten Ausdrücken berechnet, so erhält man entweder zwei gleiche oder zwei ungleiche Zahlen. Im ersteren Falle ist die

Gleichung für die Einsetzungen richtig, im zweiten Falle falsch. Z. B.:

1. die Gleichung $3(x+1)=2x+8$ erweist sich für die Einsetzungen $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$ als falsch, für die Einsetzung $x=5$ aber als richtig;
2. die Gleichung $(a+b)(a+b)=aa+2ab+bb$ erweist sich immer als richtig, was man auch für a und b setzen mag.

Gleichungen, die sich immer als richtig erweisen, welche Zahlen man auch für die in ihnen vorkommenden Buchstaben setzen mag, heißen identische Gleichungen. Die identischen Gleichungen heißen Formeln, wenn sie dazu dienen, arithmetische Wahrheiten (Gesetze) auszusprechen, die sich auf alle Zahlen beziehen. Beispiele:

1. $a \cdot 1 = a$ ist eine Formel, die ausspricht, daß jede Zahl durch Multiplikation mit 1 unverändert bleibt;
2. $a-(b+c)=a-b-c$ ist eine Formel, die so übersetzt werden kann: Eine Summe wird von einer Zahl subtrahiert, indem man den ersten Summanden subtrahiert, und dann von der erhaltenen Differenz den zweiten Summanden subtrahiert;
3. $a(b+c)=ab+ac$ ist eine Formel, die so übersetzt werden kann: Eine Zahl wird mit einer Summe multipliziert, indem man sie mit jedem Summanden einzeln multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

Da man die beiden Seiten einer Gleichung vertauschen darf, so darf auch jede Formel rückwärts (von rechts nach links) übersetzt werden. So lautet z. B. $a(b+c)=ab+ac$, rückwärts gelesen, in Worten

folgendermaßen: Zwei Produkte von gleichem Faktor werden addiert, indem man die nicht gleichen Faktoren addiert und mit der erhaltenen Summe den gleichen Faktor multipliziert.

Gleichungen, welche nur dadurch richtig werden, daß man für Buchstaben, die in ihnen auftreten, gewisse Zahlen einsetzt, heißen Bestimmungsgleichungen oder auch schlechthin Gleichungen. Tritt in einer Bestimmungsgleichung nur ein einziger Buchstabe auf, so entsteht die Aufgabe, die Zahl oder die Zahlen zu bestimmen, welche man für den Buchstaben setzen muß, damit eine richtige Zahlgleichung entsteht. Z. B.: $7x + 4 = 25$ wird nur richtig, wenn $x = 3$ ist; $x \cdot x + 14 = 9x$ wird für $x = 2$ und auch für $x = 7$ richtig, sonst immer falsch. Der Buchstabe, für welchen man eine Zahl setzen soll, damit eine Gleichung richtig wird, heißt die „Unbekannte“ der Gleichung und die Zahl selbst heißt ihr „Wert“. Die Unbekannte pflegt man mit x, y, z und auch wohl mit u, v, w zu bezeichnen.

Die Aufgabe, den Wert der Unbekannten zu finden, kann man nur in den einfachsten Fällen durch Raten lösen. Dagegen ermöglichen es die in den folgenden Abschnitten entwickelten Gesetze der Arithmetik, die Unbekannten der Gleichungen methodisch zu bestimmen. Derjenige Teil der Arithmetik, der sich insbesondere mit den methodischen Bestimmungen der Unbekannten in Gleichungen beschäftigt, heißt Algebra.

II. Abschnitt.

Rechnungsarten erster Stufe.

§ 4. Zählen, Zahl und Addition.

I. Vertauschungsgesetz: $a + b = b + a$.

II. Verbindungsgesetz: $a + (b + c) = a + b + c$.

Dinge *zählen* heißt, sie als gleichartig ansehen und ihnen einzeln andere Dinge, z. B. die Finger, Holzstäbchen, Rechenkugeln und dergleichen *zuordnen*. Die Ergebnisse des Zählens heißen *Zahlen*. Beim Schreiben macht man am einfachsten für jedes von den zu zählenden Dingen einen Punkt oder einen Strich. So entstehen die *natürlichen Zahlbilder*, wie sie die Dominosteine, die Würfel, die Spielkarten, die römischen Zahlzeichen für die drei ersten Zahlen noch heute zeigen. Beim Sprechen könnte man jedes von den zu zählenden Dingen durch einen kurzen Laut, etwa den Laut „ein" darstellen. So entständen die *natürlichen Zahlwörter*: ein, ein — ein, ein — ein — ein etc. Derartige natürliche Zahlwörter sprechen heute nur noch die Schlagwerke der Uhren aus.

Der bequemeren Übersicht wegen haben die Menschen von alters her die natürlichen Zahlzeichen und Zahlwörter durch kürzere Zeichen und Namen ersetzt, die jedem, der rechnen gelernt hat, geläufig sind. Zum Zählen gehört es deshalb auch noch, *die Zahl, das Ergebnis des Zählens*, mit diesem kurzen Namen auszusprechen oder mit diesem kurzen Zeichen hinzuschreiben. Bei der Art und Weise, wie die Namen und Zeichen für größere Zahlen aus denen für kleinere

Zahlen sich zusammensetzen, ist die Zahl zehn von den meisten Völkern bevorzugt. Dies rührt davon her, daß der Mensch zehn Finger hat, und daß er daher, wenn er den zu zählenden Dingen seine Finger zuordnet, bei der Zahl zehn einen Ruhepunkt machen muß.

Da es beim Zählen auf die Beschaffenheit der gezählten Dinge gar nicht ankommt, so liegt es nahe, die Zahlen auch unabhängig davon zu betrachten, was für Dinge gezählt sind. Dann nennt man sie unbenannte Zahlen im Gegensatz zu den benannten Zahlen, z. B. sind

4 Personen, 5 Häuser, 8 Stunden

benannte Zahlen, dagegen

4, 5, 8, 1896

unbenannte Zahlen, bei denen man sich irgendwelche Benennungen, z. B. Mark, Jahre hinzudenken darf, aber nicht notwendig hinzudenken muß. Jedes von den gezählten Dingen nennt man eine Einheit. Bei 5 Häusern ist Haus die Einheit. Bei unbenannten Zahlen betrachtet man die Zahl 1 als Einheit.

Gleich heißen zwei Zahlen, wenn sie beide dieselbe Einheit und dasselbe natürliche Zahlbild besitzen. Bei gleichen Zahlen muß es deshalb immer gelingen, die Einheiten der einen Zahl den ebenso benannten Einheiten der anderen Zahl so zuzuordnen, daß alle Einheiten an dieser Zuordnung teilnehmen.

Wenn man die Einheiten einer Zahl denen einer anderen zuordnet, und es sind, nachdem die Einheiten der ersten sämtlich zugeordnet sind, noch Einheiten der zweiten Zahl da, die noch nicht zugeordnet sind, so heißen beide Zahlen ungleich, und zwar ist die erste die kleinere, die zweite die größere. Wenn zwei

benannte Zahlen gleich oder ungleich sind, so müssen auch die durch Fortlassung der Benennung entstehenden unbenannten Zahlen gleich oder ungleich sein. Deshalb beschäftigt man sich in der Arithmetik meist nur mit unbenannten Zahlen. Unter „Zahl“ schlechthin soll immer eine unbenannte Zahl verstanden werden, wenn nicht besonders gesagt ist, daß sie benannt sein soll.

Aus dem Begriff der Zahl, der Zahlengleichheit und der Zahlenungleichheit folgen die nachstehenden Wahrheiten, welche man Grundsätze zu nennen pflegt.

1. Die Reihenfolge, in welcher man zählt, d. h. zuordnet, ist für das Ergebnis des Zählens gleichgültig.

2. $a = a$, d. h. jede Zahl ist sich selbst gleich.

3. Man darf in der Arithmetik immer für eine Zahl eine ihr gleiche einsetzen, ohne daß dadurch die Richtigkeit gestört wird. Insbesondere folgt hieraus:

$$\begin{array}{l} a = c \\ \underline{b = c} \\ a = b \end{array}$$

(den Strich liest man „folglich“) d. h. in Worten:

Sind zwei Zahlen einer und derselben dritten Zahl gleich, so sind sie auch untereinander gleich.

4. $\dfrac{a > b}{b < a}$, d. h. in Worten:

Vertauscht man die beiden Seiten einer Ungleichung, so muß man das Größer-Zeichen in das Kleiner-Zeichen oder umgekehrt verwandeln.

5. Das Gleichheitszeichen ist in ein

Größer-Zeichen zu verwandeln, wenn links Größeres oder wenn rechts Kleineres eingesetzt wird. Das Gleichheitszeichen ist in ein Kleiner-Zeichen zu verwandeln, wenn links Kleineres oder wenn rechts Größeres eingesetzt wird. Also in Formelsprache:

$a = b$	$a = b$	$a = b$	$a = b$
$c > a$	$c < b$	$c < a$	$c > b$
$c > b$	$a > c$	$c < b$	$a < c$

6. Eine Ungleichung behält ihr Ungleichheitszeichen: erstens, wenn man da, wo die größere Zahl steht, eine ihr gleiche oder eine noch größere Zahl einsetzt; zweitens, wenn man da, wo die kleinere Zahl steht, eine ihr gleiche oder eine noch kleinere Zahl einsetzt. Also in Formelsprache:

$a > b$	$a > b$	$a > b$	$a > b$
$c = a$	$c > a$	$c = b$	$c < b$
$c > b$	$c > b$	$a > c$	$a > c$

$a < b$	$a < b$	$a < b$	$a < b$
$c = a$	$c < a$	$c = b$	$c > b$
$c < b$	$c < b$	$a < c$	$a < c$

Zwei Zahlen addieren heißt, eine dritte Zahl bilden, deren Einheiten die sämtlichen Einheiten der beiden gegebenen Zahlen sind, oder was dasselbe ist, ihre Zahlbilder zu einem einzigen Zahlbilde verschmelzen, und für das so entstandene Zahlbild die zugehörige Zahl angeben. Die zu addierenden Zahlen heißen Summanden, Addenden, Terme, Posten oder Glieder, die gesuchte dritte Zahl heißt Summe.

Da man nur gleichbenannte oder unbenannte Einheiten zählen kann, so hat auch nur die Addition von gleichbenannten oder von unbenannten Zahlen einen Sinn.

Wenn $a = b$ und $c = d$ ist, so folgt daraus $a + c = b + d$, oder in Worten: Gleiches zu Gleichem addiert, gibt Gleiches. Denn nach Grundsatz 2 ist $b + d = b + d$ und nach Grundsatz 3 darf man nun links a für b und c für d setzen, wodurch $a + c = b + d$ herauskommt.

Die beiden, oben mit I. und II. bezeichneten Gesetze, die aus dem Begriff der Addition unmittelbar hervorgehen, lauten in Worten:

I. Vertauschungsgesetz. Die beiden Summanden einer Summe dürfen vertauscht werden, ohne daß dadurch die durch die Summe dargestellte Zahl sich verändert, z. B.: $7 + 3 = 3 + 7$.

II. Verbindungsgesetz. Eine Summe wird zu einer Zahl addiert, indem man den ersten Summanden addiert und zur erhaltenen Summe den andern Summanden addiert, z. B.: $4 + (5 + 7) = 4 + 5 + 7$, indem $4 + 12 = 9 + 7$ ist.

Wegen des Vertauschungsgesetzes ist es rechnerisch unnötig, die beiden Summanden durch Namen voneinander zu unterscheiden Doch kann man logisch den einen Summanden als die zu vermehrende, also passive Zahl (Augendus) von dem andern Summanden als der vermehrenden, also aktiven Zahl (Auktor) unterscheiden

Das Verbindungsgesetz kann noch auf mannigfache andere Weise als oben in Worte gekleidet werden, namentlich auch so: Wenn man den zweiten Summanden einer Summe um eine gewisse Zahl vermehrt, so wird dadurch die Summe um

diese Zahl vermehrt. Aus dem Verbindungsgesetz folgt die Richtigkeit der folgenden sechs Schlüsse:

$a = b$	$a > b$	$a > b$
$c > d$ (add.)	$c = d$ (add.)	$c > d$ (add.)
$a + c > b + d$	$a + c > b + d$	$a + c > b + d$

und umgekehrt gelesen:

$b = a$	$b < a$	$b < a$
$d < c$ (add.)	$d = c$ (add.)	$d < c$ (add.)
$b + d < a + c$	$b + d < a + c$	$b + d < a + c$

Dieses sechs Schlüsse lauten in Worten:

1. *Größeres zu Gleichem oder Gleiches zu Größerem oder Größeres zu Größerem addiert, gibt Größeres.*

2. *Kleineres zu Gleichem oder Gleiches zu Kleinerem oder Kleineres zu Kleinerem addiert, gibt Kleineres.*

Liest man das Verbindungsgesetz rückwärts, also $a + b + c = a + (b + c)$, so lautet es in Worten: *Statt eine Summe um eine Zahl zu vermehren, kann man auch ihren zweiten Summanden um dieselbe Zahl vermehren.*

Die wiederholte Anwendung des Vertauschungs- und des Verbindungsgesetzes der Addition führen zu dem folgenden allgemeinen Gesetze:

Allgemeines Verbindungsgesetz der Addition. *Bei einem Ausdruck, der zwar vielleicht Klammern, aber nur Additionen enthält, dürfen alle Klammern fortgelassen werden, und dürfen auch alle Summanden in beliebige Reihenfolge gebracht werden.*

Die Richtigkeit dieses Gesetzes kann aus folgenden

Umformungen eingesehen werden, bei denen immer jeder Ausdruck aus dem vorangehenden durch einmalige Anwendung entweder des Vertauschungsgesetzes oder des Verbindungsgesetzes hervorgeht:

1. $a+(b+c+d)=a+(b+c)+d=a+b+c+d$;
2. $a+b+c=a+(b+c)=a+(c+b)=a+c+b$;
3. $a+b+c=c+(a+b)=c+(b+a)=c+b+a$;
4. $3+[4+(c+d)]=3+4+(c+d)=7+(c+d)$
$=c+d+7$.

Eine Summe, deren erstes Glied selbst wieder eine Summe ist, faßt man kurz als eine Summe von drei Gliedern auf, und so fort. Z. B.:

$a+b+c$ ist eine Summe von drei Gliedern,
$x+y+z+u+v$ ist eine Summe von fünf Gliedern,
$d+(e+f)+(g+h+i)$ ist eine Summe von drei Gliedern.

Besonders häufig treten Summen von lauter gleichen Gliedern auf. Man schreibt dann dieses Glied nur einmal, setzt davor einen Punkt und vor den Punkt die Zahl, welche angibt, wieviel solche Glieder die Summe haben soll. Z. B.:

$$4+4+4+4+4=5\cdot 4,$$
$$a+a+a=3\cdot a,$$
$$x+x=2\cdot x.$$

Die Zahl, welche zählt, wieviel Glieder man sich denken soll, nennt man den Koeffizienten der abgekürzt geschriebenen Summe. Der Punkt kann vor einem Buchstaben oder einer Klammer fortgelassen werden. Z. B.:

$$a+a+a+a+a+a+a=7a,$$
$$(b+c)+(b+c)+(b+c)=3(b+c).$$

Wenn man zwei abgekürzt geschriebene Summen mit demselben Gliede zu addieren hat, so hat man nur die Koeffizienten zu addieren. Denn:

$$3a + 2a = (a + a + a) + (a + a) = a + a + a + a + a = 5a.$$

Eine einzige Zahl kann man als Summe von einem Gliede auffassen und deshalb mit dem Koeffizienten 1 behaftet denken. Z. B.:

$$4a + a = 4a + 1a = (a + a + a + a) + a = a + a + a + a + a = 5a.$$

Ist das Glied einer abgekürzt geschriebenen Summe selbst eine Summe, so hat man es in eine Klammer einzuschließen, z. B. $3(a + b)$. Die abgekürzt geschriebenen Summen führen später zu einer höheren Rechnungsart, der Multiplikation (vgl. § 8).

---

§ 5. Subtraktion.

I. $a - b + b = a$ (Erklärende Formel).
II. $a + b - b = a$.

Eine Zahl a um eine Zahl b vermindern oder, was dasselbe ist, eine Zahl b von einer Zahl a subtrahieren heißt, die Zahl finden, zu welcher b addiert werden muß, damit a herauskommt. Dies spricht Formel I. aus. 14 minus 6 bedeutet also die Zahl, welche, um 6 vermehrt, 14 ergibt, oder, was dasselbe ist, die Zahl, welche für x gesetzt werden muß, damit die Bestimmungsgleichung (vgl. § 3):

$$x + 6 = 14$$

richtig wird. Die Subtraktion entsteht also aus der Addition dadurch, daß man die Summe und den einen Summanden als bekannt und den andern Summanden als unbekannt und deshalb als gesucht betrachtet. Man nennt deshalb die Subtraktion die Umkehrung der Addition. Bei dieser Umkehrung erhält

die bekannte Summe den Namen Minuendus,
der bekannte Summand den Namen Subtrahendus,
der gesuchte Summand den Namen Differenz.

Hiernach besteht die Berechnung einer Differenz im Raten des Wertes der Unbekannten einer Gleichung. Um z. B. $14 - 6$ zu berechnen, hat man den Wert von x aus der Gleichung $x + 6 = 14$ zu raten. Dieses Raten wird durch den ersten Rechenunterricht teils gedächtnismäßig, teils methodisch gestaltet.

Da eine Summe zwei Summanden hat, so kann man auch von zwei Umkehrungen der Addition sprechen, je nachdem man nämlich den ersten oder den zweiten Summanden, den Augendus oder den Auktor (§ 4) als gesucht betrachtet. In der Tat lassen sich diese beiden Fälle durch zwei verschieden lautende Fragestellungen unterscheiden. Man sucht z. B. den Augendus, wenn man, um $14 - 6$ zu berechnen, fragt, welche Zahl um 6 vermehrt werden muß, damit die Summe 14 entsteht. Dagegen sucht man den Auktor, wenn man, um $14 - 6$ zu berechnen, fragt, um welche Zahl 6 vermehrt werden muß, damit die Summe 14 entsteht. Die Arithmetik hat es jedoch, dank dem Vertauschungsgesetze der Addition (§ 4), nicht nötig, die beiden Umkehrungen der Addition als zwei verschiedene Rechnungsarten zu unterscheiden.

Während die Addition zweier Zahlen immer ausführbar ist, kann die Subtraktion zweier Zahlen nur dann ausgeführt werden, wenn der Minuendus größer als der Subtrahendus ist. Dies rührt daher, daß der Minuendus, der Erklärung gemäß, immer größer als der Subtrahendus sein muß, und zwar um die gesuchte Differenz. Beispielsweise ist $8 - 12$ eine sinnlose Verknüpfung

zweier Zahlen durch das Subtraktionszeichen, weil es kein Ergebnis des Zählens gibt, das, um 12 vermehrt, 8 geben könnte.

Da die Subtraktion zweier Zahlen, wenn sie Sinn hat, immer nur zu einem einzigen Ergebnis führen kann, so läßt sich aus $a = b$ und $c = d$ schließen, daß $a - c = b - d$ sein muß. Denn man kann wegen der Eindeutigkeit der Differenz von $b - d = b - d$ ausgehen, und dann links a für b und c für d setzen. Dieser Schluß lautet in Worten: Gleiches von Gleichem subtrahiert, gibt Gleiches.

Die Formel II. $a + b - b = a$ ist deshalb richtig, weil $a + b - b$, der Erklärung gemäß, die Zahl bedeutet, die, um b vermehrt, $a + b$ ergibt. Es kann jedoch die Eigenschaft, um b vermehrt, $a + b$ zu liefern, keine andere Zahl haben als a. Die Formeln I. und II. liefern zusammen folgende Rechenregel: Addition und Subtraktion derselben Zahl heben sich auf.

Bei der Subtraktion von zwei abgekürzt geschriebenen Summen mit gleichem Gliede hat man nur die Koeffizienten zu subtrahieren. Beispiel:

$$6a - 4a = (a + a + a + a + a + a) - (a + a + a + a)$$
$$= a + a + (a + a + a + a) - (a + a + a + a) = a + a = 2a.$$

Daraus, daß $x = a - b$ und $x + b = a$ ganz dasselbe, nur in zwei verschiedenen Schreibweisen aussagen, ergibt sich die für die Lösung von Gleichungen wichtige

Transpositionsregel erster Stufe: Eine Zahl, welche auf der einen Seite einer Gleichung Summandus ist, kann dort fortgelassen und auf die andere Seite der Gleichung als Subtrahendus geschrieben werden und umgekehrt. Man nennt dann die Zahl transponiert. Z. B.:

aus $x + 6 = 14$ folgt $x = 14 - 6$,
aus $5 + x = 17$ folgt $x = 17 - 5$,
aus $x - 8 = 11$ folgt $x = 11 + 8$.

Ist die Unbekannte x Subtrahendus, so wendet man am besten die aus dem Vertauschungsgesetze der Addition folgende Regel an: Subtrahendus und Differenz dürfen vertauscht werden. Z. B.:

aus $9 - x = 4$ folgt $9 - 4 = x$.

Diese vier Beispiele zeigen zugleich, wie durch Transponieren die **Isolierung** einer unbekannten Zahl und so die **Lösung von Gleichungen** bewerkstelligt werden kann.

Das Transponieren kann auch als eine Anwendung der Sätze „Gleiches zu Gleichem addiert, gibt Gleiches“ und „Gleiches von Gleichem subtrahiert, gibt Gleiches“ aufgefaßt werden. Subtrahiert man z. B. von $x + 6 = 14$ die Gleichung $6 = 6$, so erhält man, da $x + 6 - 6 = x$ ist, $x = 14 - 6 = 8$.

---

§ 6. Regeln für die erste Stufe.

I. $\mathbf{a + (b + c) = a + b + c}$ **(Verb.-Ges. d. Add. § 4, II),**
II. $\mathbf{a + (b - c) = a + b - c}$,
III. $\mathbf{a - (b + c) = a - b - c}$,
IV. $\mathbf{a - (b - c) = a - b + c}$,
V. $\mathbf{a - b = (a + d) - (b + d)}$,
VI. $\mathbf{a - b = (a - d) - (b - d)}$.

Die Formel I. ist schon in § 4 aus dem Begriff der Addition abgeleitet. Bei den übrigen Formeln ist mindestens eine Seite eine Differenz. Um sie zu beweisen, hat man also, wegen der erklärenden Formel der Subtraktion (§ 5), nur zu prüfen, ob die andere Seite der Formel, um den Subtrahendus der Differenz vermehrt, den Minuendus ergibt. Bei dieser Prüfung

darf man alle bis dahin bewiesenen Formeln, vorwärts oder rückwärts gelesen, anwenden. Dies sind aber bis jetzt nur die beiden Formeln des § 4 und die beiden Formeln des § 5.

Daß II. richtig ist, ergibt sich so:

$$a + (b - c) + c = a + [(b - c) + c] = a + b.$$

Daß III. richtig ist, ergibt sich so:

$$a - b - c + (b + c) = a - b - c + (c + b) = a - b - c + c + b$$
$$= a - b + b = a.$$

Daß IV. richtig ist, ergibt sich so:

$$a - b + c + (b - c) = a - b + [c + (b - c)]$$
$$= a - b + [b - c + c] = a - b + b = a.$$

Daß V. richtig ist, ergibt sich so:

$$a - b + (b + d) = a - b + b + d = a + d.$$

Daß VI. richtig ist, ergibt sich so:

$$a - b + (b - d) = a - b + b - d = a - d.$$

Das Übersetzen der Formeln, vorwärts und rückwärts gelesen, ist schon im Abschnitt I. eingeübt. Die Formeln I. bis IV. liefern, vorwärts gelesen, Regeln, wie Summen und Differenzen addiert und subtrahiert werden dürfen, dagegen, rückwärts gelesen, Regeln, wie Summen und Differenzen vermehrt oder vermindert werden dürfen. Im ersten Falle werden die Klammern gelöst, im zweiten Falle gesetzt.

Durch mehrmalige Anwendung der Formeln I. bis IV. kann man auch Klammern lösen, welche auf Plus- oder Minuszeichen folgen und verwickeltere Ausdrücke einschließen. Z. B.:

1. $a + b + (c - d + e) = a + b + (c - d) + e$
$= a + b + c - d + e;$

2. $p + [a + (b - c) - d] = p + [a + (b - c)] - d$
$= p + a + (b - c) - d = p + a + b - c - d;$

3. $v-(x-y+z-u)=v-(x-y+z)+u$
$=v-(x-y)-z+u=v-x+y-z+u.$

Hieraus ergeben sich die Regeln:

Erste Regel: Eine Klammer, vor der ein Pluszeichen steht, kann ohne weiteres fortgelassen werden.

Zweite Regel: Eine Klammer, vor der ein Minuszeichen steht, kann man fortlassen, wenn man dabei Addenden in Subtrahenden, Subtrahenden in Addenden und den etwa vorhandenen Minuendus in einen Subtrahendus verwandelt, d. h., wenn man die Pluszeichen in Minuszeichen, die Minuszeichen in Pluszeichen verwandelt. Eine innerhalb der aufzulösenden Klammer stehende neue Klammer ist dabei zunächst unversehrt zu lassen.

Aus den Formeln des § 4, § 5 und den obigen Formeln I. bis IV. folgen auch leicht die Formeln:

$a+b+c=a+c+b$, $a+b-c=a-c+b$,
$a-b+c=a+c-b$, $a-b-c=a-c-b$,

woraus hervorgeht:

Dritte Regel: Summanden und Subtrahenden dürfen in beliebige Reihenfolge gebracht werden.

Aus dieser Regel und der Formel $a-b-c$ $=a-(b+c)$ ergibt sich:

Vierte Regel: Ein Ausdruck, der keine andern Rechnungsarten als Addition und Subtraktion enthält, wird berechnet, indem man erstens nach der ersten und zweiten Regel alle Klammern löst, und indem man zweitens die Summe der hinter Minuszeichen stehenden Zahlen von der Summe der

hinter Pluszeichen stehenden Zahlen subtrahiert. Z. B.:

$$11 - [5 + (8 - 6)] + (7 - 3 + 12)$$
$$= 11 - 5 + (8 - 6) + 7 - 3 + 12$$
$$= 11 - 5 + 8 - 6 + 7 - 3 + 12$$
$$= (11 + 8 + 7 + 12) - (5 + 6 + 3) = 38 - 14 = 24\,.$$

Die Schlüsse, welche den bei der Addition (vgl. dort) klargelegten sechs Schlüssen bei der Subtraktion entsprechen, sind folgende:

$a > b$	$a = b$	$a > b$
$c = d$ (subt.)	$c > d$ (subt.)	$c < d$ (subt.)
$a - c > b - d$	$a - c < b - d$	$a - c > b - d$

und, umgekehrt gelesen:

$b < a$	$b = a$	$b < a$
$d = c$ (subt.)	$d < c$ (subt.)	$d > c$ (subt.)
$b - d < a - c$	$b - d > a - c$	$b - d < a - c$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß $c < a$ und $d < b$ ist, weil sonst die Subtraktionen keinen Sinn hätten.

Man beweist diese Schlüsse, indem man jede Ungleichung in eine Gleichung verwandelt und dann die Formeln I. bis IV. anwendet. Z. B. sagt man $c = d + p$ statt $c > d$ und erhält so aus $\left\{\begin{matrix} a = b \\ c > d \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} a = b \\ c = d + p \end{matrix}\right\}$, woraus $a - c = b - d - p$ folgt, d. h. $a - c$ kleiner als $b - d$, nämlich um p.

---

§ 7. Null und negative Zahlen.

Erweiterung des Zahlbegriffs: $a - b + b = a$, auch wenn a nicht größer als b ist.

I. Erklärung der Null: $a - a = b - b = 0$.

II. Erklärung der negativen Zahlen:

$$a - (a + n) = b - (b + n) = -n.$$

III. Rechnen mit Null:

$$a + 0 = a, \quad a - 0 = a, \quad 0 - a = -a.$$

IV. Rechnen mit negativen Zahlen:

$$a + (-n) = a - n, \quad a - (-n) = a + n,$$
$$(-n) - a = -(n + a).$$

Da bei der Erklärung der Subtraktion aus der Addition die Summe zum Minuenden wird, also größer als der Subtrahend sein muß, so hat $a - b$, wenn a gleich oder kleiner als b ist, zwar die Form einer Differenz, aber dennoch gar keinen Sinn, weil $a - b$ dann keine Zahl im Sinne des § 4, d. h. kein Ergebnis des Zählens, darstellt. Wenn aber etwas noch keinen Sinn hat, so kann man ihm noch einen Sinn erteilen, und es erscheint zweckmäßig, der Differenzform $a - b$, wo a gleich oder kleiner als b ist, einen Sinn zu erteilen, der gestattet, daß man mit dieser Differenzform so rechnen darf, wie mit eigentlichen Differenzen*). Da alles Rechnen mit Differenzen aber auf der erklärenden Formel $a - b + b = a$ beruht, so erreicht man das ge-

*) Der Gedanke, einer bis dahin sinnlosen Verknüpfung zweier Zahlen den Sinn zu erteilen, der gestattet, daß man damit rechnen kann wie mit Sinn habenden, ebenso gestalteten Verknüpfungen, wird in der Arithmetik konsequent durchgeführt und führt zu den verschiedenen Erweiterungen des Zahlbegriffs (gebrochene, irrationale, imaginäre Zahlen). Indem man diesen Gedanken durchführt, wendet man ein Prinzip an, das Hankel „Prinzip der Permanenz" genannt hat, und das wir hier „Prinzip der Ausnahmslosigkeit" nennen wollen.

nannte Ziel, wenn man unter $a-b$, wo a gleich oder kleiner als b ist, etwas versteht, was, vermehrt um b, a liefert. Mit $3-3$ verspricht man also, daß man $3-3+3$ gleich 3 setzen will, und mit $5-8$, daß man $5-8+8$ gleich 5 setzen will. Da man also mit $a-b$, wenn a gleich oder kleiner als b ist, rechnen kann wie mit eigentlichen Differenzen, also auch die Formel V. und VI. aus § 6 auf eine solche Differenzform anwenden kann, so erhält man:

$$a-a=b-b$$

und $a-(a+n)=b-(b+n)$.

Für alle hiernach einander gleichen Differenzformen, bei denen Minuend und Subtrahend dieselben Zahlen sind, hat man ein gemeinsames Zeichen eingeführt, nämlich das Zeichen:

0 (gelesen: „null").

Ebenso hat man für alle einander gleichen Differenzformen, bei denen der Subtrahend um n größer ist als der Minuend, ein gemeinsames Zeichen eingeführt, nämlich das Zeichen:

$-n$ (gelesen: minus n).

Indem man diese Differenzformen auch Zahlen nennt, erweitert man den in § 4 erörterten Zahlbegriff.

Beispiele: $4-4=0$, $8-8=0$, $8-11=-3$, $20-21=-1$.

Wenn man die Zahlen:

$$-1,\quad -2,\quad -3,\quad -4,\quad -5,\ \ldots$$

den natürlichen Zahlen (im Sinne des § 4)

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

sich entsprechen läßt, so nennt man die neuen Zahlen negativ, die alten positiv.

Da $0+a$ oder $a+0=a+(b-b)=a+b-b=a$ ist, und da auch $a-0=a-(b-b)=a-b+b=a$ ist, so gilt der Satz:

Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie um 0 vermehrt oder vermindert.

Da $0 - n = b - b - n = b - (b + n) = -n$ ist, so gilt der Satz:

Eine Zahl geht in die entsprechende negative über, wenn man sie von 0 subtrahiert.

Da hiernach $0 - n = -n$, $0 + n = n$ ist, so liegt es nahe, für n auch $+n$ zu schreiben. Demgemäß sagt man statt positiver und negativer Zahlen auch Zahlen mit dem Vorzeichen plus und Zahlen mit dem Vorzeichen minus. Von den beiden Vorzeichen

$$+ \text{ und } -$$

heißt das eine das umgekehrte oder das entgegengesetzte des andern.

Die in der Überschrift mit IV. bezeichneten drei Formeln lassen sich folgendermaßen beweisen:

$$a + (-n) = a + [b - (b + n)] = a + b - (b + n)$$
$$= a + b - b - n = a - n ;$$
$$a - (-n) = a - [b - (b + n)] = a - b + (b + n)$$
$$= a - b + b + n = a + n ;$$
$$(-n) - a = b - (b + n) - a = b - b - n - a$$
$$= 0 - n - a = 0 - (n + a) = -(n + a) .$$

Liest man die erste der hiermit bewiesenen drei Formeln umgekehrt und schreibt dabei $+n$ statt n, so erhält man $a - (+n) = a + (-n)$. Diese Formel führt im Verein mit der zweiten von den obigen drei Formeln zu dem Satze:

Eine positive Zahl subtrahiert man, indem man die entsprechende negative addiert. Eine negative Zahl subtrahiert man, indem man die entsprechende positive addiert.

Hierdurch ist das Subtrahieren von mit Vorzeichen versehenen Zahlen immer in ein Addieren solcher Zahlen verwandelt. Für das Addieren solcher Zahlen aber

gelten die folgenden aus dem Obigen hervorgehenden drei Sätze:

1. Zwei positive Zahlen werden addiert, indem man sie, abgesehen vom Vorzeichen, addiert, und der erhaltenen Summe das positive Vorzeichen gibt. Z. B.:

$$(+3)+(+6)=+9.$$

2. Zwei negative Zahlen werden addiert, indem man sie, abgesehen vom Vorzeichen, addiert, und der erhaltenen Summe das negative Vorzeichen gibt. Z. B.:

$$(-4)+(-8)=-12.$$

3. Eine positive Zahl und eine negative Zahl werden addiert, indem man sie, abgesehen vom Vorzeichen, subtrahiert, und der erhaltenen Differenz das Vorzeichen der größeren Zahl gibt. Z. B.:

$$(-4)+(+9)=+5, \quad (-13)+(+11)=-2.$$

Die Erfindung der negativen Zahlen ermöglicht es, einen klammerlosen Ausdruck, der nur Additionen und Subtraktionen enthält, als eine Summe von Zahlen aufzufassen, die entweder positiv oder negativ sind. Es ist z. B. $7-5+3+8-4$ eine Summe der Zahlen $(+7)$, (-5), $(+3)$, $(+8)$, (-4). Hiernach kann man die zweite Regel in § 6 kurz so aussprechen:

Eine Klammer, vor der ein Minuszeichen steht, wird aufgelöst, indem man die Vorzeichen der in ihr enthaltenen Summanden umkehrt.

Durch die Erfindung der Null und der negativen Zahlen erhalten alle bisher aufgestellten Formeln einen ausgedehnteren Sinn und die in § 4, § 5, § 6 auf-

gestellten Vergleichungsschlüsse eine ausgedehntere Anwendung, wenn man beachtet, daß a größer als b heißen soll, wenn a — b positiv ist, gleichviel ob a und b null, positiv oder negativ sind. Z. B.:

$$\begin{array}{|r|rl|rl|} +7>-3 & -4=-4 & & 0<+8 & \\ -3>-4 & +2>-2 & \text{(add.)} & -3>-4 & \text{(subt.)} \\ \hline +7>-4 & -2>-6 & & +3<+12\,. & \end{array}$$

Auch ermöglicht die Einführung der Null und der negativen Zahlen die Lösbarkeit von Gleichungen, die bis dahin als unlösbar gelten mußten. Z. B. ergibt

$$5-(x+8)=+1$$

die Lösung $5-x-8=+1$ oder $-3=x+1$ oder $-4=x$, d. h.

$$x=-4\,.$$

Die Betrachtungen, welche auf die Erfindung der Null und der negativen Zahlen führten, lassen sich ohne weiteres auch auf benannte Zahlen übertragen. So ist z. B. $-8\,\mathcal{M}$ eine Differenzform, welche ausspricht, daß man

$$-8\,\mathcal{M}+(n+8)\,\mathcal{M}=n\,\mathcal{M}$$

setzen will. In den Anwendungen kann man aus einer negativen benannten Zahl durch Veränderung eines Wortes meist die entsprechende positiv benannte Zahl bilden. So heißt z. B.:

— a Schritte vorwärts dasselbe wie a Schritte rückwärts,

— a Mark Vermögen dasselbe wie a Mark Schulden,

— n Mark Gewinn dasselbe wie n Mark Verlust.

Ferner heißt z. B.:

0 Schritte vorwärts dasselbe wie keinen Schritt vorwärts und auch keinen rückwärts.

III. Abschnitt.

Rechnungsarten zweiter Stufe.

§ 8. Multiplikation.

Erklärende Formel: $\overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \overset{3)}{a} + \ldots + \overset{m)}{a} = a \cdot m .$

Verteilungsgesetze:

I. $a \cdot m + a \cdot p = a(m + p)$,

II. $a \cdot m - a \cdot p = a(m - p)$, wo $m > p$ ist,

III. $b \cdot m + c \cdot m = (b + c) m$,

IV. $b \cdot m - c \cdot m = (b - c) m$.

Vertauschungsgesetz: V. $a \cdot b = b \cdot a$.

Verbindungsgesetz: VI. $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$.

Eine Zahl a mit einer Zahl m multiplizieren heißt, eine Summe von m Summanden bilden, so daß jeder Summand a ist. Die Zahl a, welche als Summand gedacht ist, heißt Multiplikandus, die Zahl m, welche angibt, wie oft die andere Zahl a als Summand gedacht ist, heißt Multiplikator. Der Multiplikandus, als die passive Zahl, ist in den obigen Formeln immer vor den Multiplikator, als die aktive Zahl, gesetzt. Das Ergebnis der Multiplikation, welches man $a \cdot m$ oder auch am schreibt, heißt Produkt. Hiernach kann der Multiplikator, welcher ja ein „wie oft" zählt, naturgemäß nur eine natürliche Zahl im Sinne des § 4 sein. Dagegen kann der Multiplikandus positiv, null und negativ sein. Z. B.:

$$(+a) \cdot 4 = +a + a + a + a = +(4a),$$

$$0 \cdot 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$(-a) \cdot 4 = (-a) + (-a) + (-a) + (-a) = -(4a).$$

Insofern man a als Summe von einem Summanden auffaßt, setzt man auch $a \cdot 1 = a$.

Da man nicht allein unbenannte, sondern auch gleichbenannte Zahlen addieren kann, so kann der Multiplikandus auch eine benannte Zahl sein. Dann hat das Produkt dieselbe Benennung. Z. B.: 5 Bücher mal 4 gleich 20 Bücher. Dagegen ist ein benannter Multiplikator Unsinn. Denn es würde z. B.: 4 mal 5 Bücher, wo 4 Multiplikand, 5 Bücher Multiplikator wäre, verlangen, daß man die Zahl vier 5 Bücher mal als Summanden setzen soll, was Unsinn ist.

Da die Verknüpfung zweier Zahlen durch Multiplikation nur zu einem einzigen Ergebnis führt, so kann man den Satz aufstellen: Gleiches mit Gleichem multipliziert, gibt Gleiches. Denn wenn $a = b$ und $c = d$ ist, so kann man dann von $b \cdot d = b \cdot d$ ausgehen, links a für b und c für d setzen, so daß sich $a \cdot c = b \cdot d$ ergibt.

Der Beweis der vier Verteilungsgesetze geht aus Folgendem hervor:

$$\text{I.}\quad a \cdot m + a \cdot p = \left(\overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \ldots + \overset{m)}{a}\right) + \left(\overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \ldots + \overset{p)}{a}\right)$$

$$= \overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \ldots + \overset{m+p)}{a} = a(m+p)\,;$$

$$\text{II.}\quad a \cdot m - a \cdot p = \left(\overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \ldots + \overset{m)}{a}\right) - \left(\overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \ldots + \overset{p)}{a}\right)$$

$$= \left(\overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \ldots + \overset{p)}{a}\right) + \left(\overset{p+1)}{a} + \overset{p+2)}{a} + \ldots + \overset{m)}{a}\right) - \left(\overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \ldots + \overset{p)}{a}\right)$$

$$= \overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \ldots + \overset{m-p)}{a} = a(m-p)\,;$$

$$\text{III.}\quad \begin{aligned} b\cdot m &= \overset{1)}{b}+\overset{2)}{b}+\ldots+\overset{m)}{b} \\ c\cdot m &= \overset{1)}{c}+\overset{2)}{c}+\ldots+\overset{m)}{c} \ \text{(add.)} \\ \hline b\cdot m + c\cdot m &= \overset{1)}{(b+c)}+\overset{2)}{(b+c)}+\ldots+\overset{m)}{(b+c)} \\ &= (b+c)\,m\,; \end{aligned}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{aligned} b\cdot m &= \overset{1)}{b}+\overset{2)}{b}+\ldots+\overset{m)}{b} \\ c\cdot m &= \overset{1)}{c}+\overset{2)}{c}+\ldots+\overset{m)}{c} \ \text{(subt.)} \\ \hline b\cdot m - c\cdot m &= \left(b-\overset{1)}{c}\right)+\left(b-\overset{2)}{c}\right)+\ldots+\left(b-\overset{m)}{c}\right) \\ &= (b-c)\,m\,. \end{aligned}$$

In Worten heißen diese vier Verteilungsgesetze:

I. (vorwärts gelesen): Die Summe zweier Produkte von gleichem Multiplikandus ist gleich dem Produkte dieses Multiplikandus mit der Summe der Multiplikatoren.

I. (rückwärts gelesen): Mit einer Summe multipliziert man, indem man mit den Summanden einzeln multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

II. (vorwärts gelesen): Die Differenz zweier Produkte von gleichem Multiplikandus ist gleich dem Produkte dieses Multiplikandus mit der Differenz der Multiplikatoren.

II. (rückwärts gelesen): Mit einer Differenz multipliziert man, indem man mit Minuendus und Subtrahendus einzeln multipliziert und die erhaltenen Produkte subtrahiert.

III. (vorwärts gelesen): Die Summe zweier Produkte von gleichem Multiplikator ist gleich dem Produkte der Summe der Multiplikanden mit dem gleichen Multiplikator.

III. (rückwärts gelesen): Eine Summe multi-

pliziert man, indem man ihre Summanden einzeln multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

IV. (vorwärts gelesen): Die Differenz zweier Produkte von gleichem Multiplikator ist gleich dem Produkte der Differenz der Multiplikanden mit dem gleichen Multiplikator.

IV. (rückwärts gelesen): Eine Differenz multipliziert man, indem man Minuendus und Subtrahendus einzeln multipliziert und die erhaltenen Produkte subtrahiert.

Auf den Verteilungsgesetzen beruht die Richtigkeit der folgenden Schlüsse:

$a = b$	$a > b$	$a > b$
$c > d$ (mult.)	$c = d$ (mult.)	$c > d$ (mult.)
$a \cdot c > b \cdot d$	$a \cdot c > b \cdot d$	$a \cdot c > b \cdot d$

oder, rückwärts gelesen:

$b = a$	$b < a$	$b < a$
$d < c$ (mult.)	$d = c$ (mult.)	$d < c$ (mult.)
$b \cdot d < a \cdot c$	$b \cdot d < a \cdot c$	$b \cdot d < a \cdot c$

Um z. B. den zu zweit genannten Schluß zu beweisen, schreibt man $a = b + p$ statt $a > b$, wo p die Zahl ist, um welche a größer als b ist. Dann ergibt sich durch Multiplikation mit $c = d$ zunächst $a \cdot c = b \cdot d + p \cdot d$, d. h. aber $a \cdot c > b \cdot d$, nämlich um $p \cdot d$.

Nach der Definition der Multiplikation hat ein Produkt, dessen Multiplikator null oder negativ ist, keinen Sinn. Um ihm einen Sinn beizulegen, der gestattet, daß alle Rechengesetze auch für solche Produkte bestehen bleiben, muß man, gemäß § 7, Null und negative Zahlen als Differenzen auffassen, und die

Regeln, wie mit einer Differenz multipliziert wird (Verteilungsgesetz II. rückwärts), auf die zu Null und negativen Zahlen führenden uneigentlichen Differenzen übertragen. So erhält man:

$$a \cdot 0 = a \cdot (b - b) = a \cdot b - a \cdot b = 0,$$

$$a \cdot (-n) = a \cdot [b - (b + n)] = a \cdot b - a \cdot (b + n)$$
$$= a \cdot b - (a \cdot b + a \cdot n) = a\,b - a\,b - a\,n = -(a\,n).$$

Diese Ergebnisse lauten in Worten:

Durch Multiplikation einer beliebigen Zahl **mit** Null erhält man wieder Null.

Mit einer negativen Zahl multipliziert man, indem man mit ihr, abgesehen vom Vorzeichen, multipliziert, und dem erhaltenen Produkte das entgegengesetzte Vorzeichen gibt.

Ist insbesondere Multiplikator und Multiplikandus negativ, so ergibt sich eine positive Zahl, wie auch aus der folgenden Ableitung hervorgeht:

$$(-a) \cdot (-b) = (-a)[c - (c + b)]$$
$$= (-a) \cdot c - (-a)(c + b) = -a\,c - [-a\,c - a\,b]$$
$$= -a\,c + a\,c + a\,b = +(a\,b).$$

Faßt man die beiden obigen Regeln über das Multiplizieren mit Null und negativen Zahlen mit den Regeln über das Multiplizieren von Null und negativen Zahlen zusammen, so erhält man:

1. Ein Produkt ist gleich null, wenn Multiplikator oder Multiplikandus oder beide null sind.

2. Zwei Zahlen, von denen jede positiv oder negativ sein kann, werden multipliziert, indem man sie, abgesehen vom Vorzeichen, multipliziert, und dem erhaltenen Produkte das positive oder das negative Vorzeichen

gibt, je nachdem die beiden Zahlen gleiche oder ungleiche Vorzeichen hatten.

Die Verteilungsgesetze lassen sich leicht auch auf die Fälle ausdehnen, wo Multiplikator oder Multiplikandus Summen sind, die beliebig viele positive oder negative Summanden umfassen. Namentlich ist also:

1. $ap + aq + ar = a(p + q + r)$,
2. $ap + aq - ar = a(p + q - r)$,
3. $am + bm + cm = (a + b + c)m$,
4. $am - bm + cm = (a - b + c)m$.

In 1. und 2. erscheint der Multiplikandus a, in 3. und 4. der Multiplikator m „abgesondert“. Beim Absondern werden also Klammern gebildet. Liest man die vier Formeln umgekehrt, so erscheinen die Klammern „gelöst“.

Aus den Verteilungsgesetzen gehen ferner die Regeln für die Fälle hervor, wo Multiplikator und Multiplikandus beide Summen oder Differenzen sind. Nämlich:

5. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$,
6. $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$,
7. $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$,
8. $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$.

Für den Fall, daß Multiplikandus und Multiplikator mehr als zwei positive oder negative Summanden einschließen, diene folgendes Beispiel:

$$(a + b - c)(e - f - g + h) = ae - af - ag + ah + be - bf - bg + bh - ce + cf + cg - ch.$$

Demgemäß lautet die

Allgemeine Verteilungsregel: Eine Summe, die beliebig viele positive oder negative Summanden umfaßt, wird mit einer anderen solchen Summe multipliziert, indem man jeden

Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert und das Vorzeichen jedes Produktes nach der Gedächtnisregel bestimmt: „Gleiche Vorzeichen geben Plus, ungleiche Minus."

Das Vertauschungsgesetz läßt sich mit Hilfe der Verteilungsgesetze beweisen, nämlich:

$$\mathbf{a} \cdot b = \left(\overset{1)}{1} + \overset{2)}{1} + \ldots + \overset{a)}{1}\right) b = \overset{1)}{1} \cdot b + \overset{2)}{1} \cdot b + \ldots + \overset{a)}{1} \cdot b$$

$$= \overset{1)}{b} + \overset{2)}{b} + \ldots + \overset{a)}{b} = b \cdot \mathbf{a}.$$

Bei diesem Beweise ist vorausgesetzt, daß **a** eine natürliche Zahl im Sinne des § 4 ist. Es ist aber auch $0 \cdot b = b \cdot 0$, weil beide null sind. Ebenso ist $(-n) \cdot a = a \cdot (-n)$, weil beide $-(a \cdot n)$ ergeben. In Worten lautet das

Vertauschungsgesetz: Multiplikandus und Multiplikator dürfen vertauscht werden, ohne daß dadurch die von dem Produkte dargestellte Zahl sich ändert.

Ist der Multiplikandus eine benannte Zahl, so verliert das Vertauschungsgesetz seine Gültigkeit, weil der Multiplikator nicht bekannt sein darf.

Wegen des Vertauschungsgesetzes ist es bei unbenannten Zahlen meist zwecklos, Multiplikator und Multiplikandus zu unterscheiden. Man bezeichnet deshalb beide mit einem gemeinsamen Namen, nämlich **Faktor,** und schreibt die beiden Faktoren eines Produkts in beliebiger Reihenfolge. Den einen Faktor nennt man den **Koeffizienten** des anderen. Das Produkt nennt man ein **Vielfaches** von jedem seiner Faktoren, und jeden Faktor einen **Teiler** des Produkts.

Auch das Verbindungsgesetz läßt sich mit Hilfe der Verteilungsgesetze beweisen, nämlich:

$$a \cdot b \cdot c = \overset{1)}{a \cdot b} + \overset{2)}{a \cdot b} + \cdots + \overset{c)}{a \cdot b} = a(\overset{1)}{b} + \overset{2)}{b} + \cdots + \overset{c)}{b})$$
$$= a \cdot (b \cdot c).$$

Bei diesem Beweise ist vorausgesetzt, daß c eine natürliche Zahl im Sinne des § 4 ist. Es ist aber auch $a \cdot b \cdot 0 = a \cdot (b \cdot 0)$, weil beide null ergeben. Ebenso ist $a \cdot b \cdot (-n) = a \cdot [b \cdot (-n)]$, weil beide zu $-(a \cdot b \cdot n)$ führen. In Worten lautet das

Verbindungsgesetz (vorwärts gelesen): Mit einem Produkte multipliziert man, indem man mit dem Multiplikandus multipliziert und das erhaltene Produkt dann noch mit dem Multiplikator multipliziert, (rückwärts gelesen:) Ein Produkt wird multipliziert, indem man den Multiplikator multipliziert und mit dem erhaltenen Produkte dann noch den Multiplikandus multipliziert.

Die vereinigte Wirkung des Vertauschungs- und des Verbindungsgesetzes führt zu folgendem Ergebnis:

$$abc = acb = bac = bca = cab = cba = a(bc)$$
$$= a(cb) = b(ac) = b(ca) = c(ab) = c(ba),$$

und überhaupt zu der

Allgemeinen Verbindungsregel: Bei einem Ausdruck, welcher außerhalb und innerhalb der Klammern keine anderen Rechnungsarten als Multiplikationen enthält, dürfen alle Klammern beliebig fortgelassen und gesetzt werden, und dürfen auch alle Faktoren in beliebige Reihenfolge gebracht werden. Z. B.:

$$2c(5b)a = 2 \cdot 5a \cdot b \cdot c = 10abc$$

Ein Produkt, dessen einer Faktor selbst wieder ein Produkt ist, bezeichnet man kurz

als ein Produkt von drei Faktoren und so fort. Z. B.:

abc ist ein Produkt von drei Faktoren,

aaaa ist ein Produkt von vier Faktoren,

$3(a+b)cd(e+f)$ ist ein Produkt von fünf Faktoren.

Eine Zahl oder eine Summe oder eine Differenz bezeichnet man auch wohl als ein Produkt von einem Faktor.

Für ein Produkt von lauter gleichen Faktoren schreibt man zur Abkürzung den Faktor nur einmal und stellt die Zahl, welche angibt, wie oft er gesetzt ist, höher und kleiner rechts daneben. Z. B. schreibt man statt aaaa kürzer a^4 (gelesen: a hoch vier) und nennt dann ein derartig abgekürzt geschriebenes Produkt eine Potenz, die Zahl, welche als Faktor gesetzt wird, Basis, und die Zahl, welche zählt, wie oft die Basis als Faktor zu denken ist, Exponent. Man nennt auch a^4 die vierte Potenz von a und liest deshalb a^4 auch „a zur vierten Potenz" oder kürzer „a zur vierten".

Wie Potenzen derselben Basis zu multiplizieren sind, ergibt sich unmittelbar aus ihrer Erklärung, z. B.:

$$a^4 \cdot a^3 = (aaaa)(aaa) = aaaaaaa = a^7,$$
$$b^5 \cdot b^7 = b^{12}, \quad 2^6 \cdot 2^4 = 2^{10}, \quad 7^3 \cdot 7 = 7^4.$$

Wenn also Potenzen gleicher Basis multipliziert werden sollen, müssen ihre Exponenten addiert werden. Ist die Basis einer Potenz eine Summe, eine Differenz oder ein Produkt, so hat man sie einzuklammern, z. B. $(a+b)^3$.

So wie die abgekürzt geschriebenen Summen eine neue Rechnungsart, die Multiplikation, hervorriefen, so rufen auch die abgekürzt geschriebenen Produkte eine

neue Rechnungsart, die Potenzierung hervor, die jedoch erst später als besondere Rechnungsart behandelt werden wird (§ 23).

§ 9. Division.

I. $a : b \cdot b = a$ (Erklärende Formel).
II. $a \cdot b : b = a$.

Eine Zahl a durch eine Zahl b dividieren oder, was dasselbe ist, eine Zahl b in eine Zahl a dividieren heißt, die Zahl finden, welche, mit b multipliziert werden muß, damit a herauskommt. Dies spricht Formel I. aus. 15 durch 3 bedeutet also die Zahl, welche, mit 3 multipliziert, 15 ergibt, oder, was dasselbe ist, die Zahl, welche für x gesetzt werden muß, damit die Bestimmungsgleichung (vgl. § 3):

$$x \cdot 3 = 15$$

richtig wird. Die Division entsteht also aus der Multiplikation dadurch, daß man das Produkt und den einen Faktor als bekannt und den anderen Faktor als unbekannt und deshalb als gesucht betrachtet. Man nennt deshalb die Division die Umkehrung der Multiplikation. Bei dieser Umkehrung erhält:

das bekannte Produkt den Namen Dividendus,
der bekannte Faktor den Namen Divisor,
der gesuchte Faktor den Namen Quotient.

Hiernach besteht die Berechnung eines Quotienten im Raten des Wertes der Unbekannten einer Gleichung. Um z. B. 15 : 3 zu berechnen, hat man den Wert von x aus der Gleichung $x \cdot 3 = 15$ zu raten. Dieses Raten wird durch den Rechenunterricht teils gedächtnismäßig, teils methodisch gestaltet.

Statt des aus einem Doppelpunkte bestehenden Divisionszeichens schreibt man auch einen wagerechten

Strich, über den man den Dividendus und unter den man den Divisor stellt. Diese Schreibweise macht oft Klammern überflüssig, weil der Divisionsstrich über die Reihenfolge der Rechnungsarten keinen Zweifel läßt. Z. B.:

$$(17+3):4=\frac{17+3}{4}, \; [e+f(g-h)]:(a-b)=\frac{e+f(g-h)}{a-b}.$$

Da ein Produkt zwei Faktoren hat, so könnte man auch von zwei Umkehrungen der Multiplikation sprechen, je nachdem man nämlich den Multiplikandus oder den Multiplikator als gesucht betrachtet. In der Tat kann man diese beiden Fälle durch zwei verschieden lautende Fragestellungen unterscheiden. Man sucht z. B. den Multiplikandus, wenn man, um 15 : 3 zu berechnen, fragt, welche Zahl mit 3 multipliziert werden muß, damit das Produkt 15 entsteht. Dagegen sucht man den Multiplikator, wenn man, um 15 : 3 zu berechnen, fragt, mit welcher Zahl 3 multipliziert werden muß, damit das Produkt 15 entsteht. Die Arithmetik der unbenannten Zahlen hat es jedoch, dank dem Vertauschungsgesetze der Multiplikation (§ 8, V), nicht nötig, die beiden Umkehrungen der Multiplikation als verschieden aufzufassen. Wohl aber zeigt sich die Verschiedenheit, wenn der eine der beiden Faktoren eines Produkts benannt ist. Da dieser Faktor dann den Multiplikandus darstellen muß, und der andere Faktor als Multiplikator unbenannt sein muß, so ergibt sich, daß überhaupt die Division nur in den folgenden drei Fällen Sinn hat:

1. Dividendus und Divisor unbenannt; der Quotient wird unbenannt.

2. Dividendus benannt, Divisor unbenannt; der

Quotient wird eine Zahl von derselben Benennung wie der Dividendus. In diesem Falle, wo nach einem Multiplikandus gesucht wird, könnte man das Dividieren auch Teilen (in gleiche Teile) oder Einteilen nennen. Z. B. 12 cm : 3 = 4 cm; 12 Menschen : 3 = 4 Menschen.

3. Dividendus und Divisor, beide gleichbenannt; der Quotient wird unbenannt. In diesem Falle, wo ein Multiplikator gesucht wird, könnte man das Dividieren auch Messen nennen. Z. B.: 12 cm : 4 cm = 3; 12 Menschen : 4 Menschen = 3.

Damit eine Division ausführbar sei oder, wie man sagt, aufgehe, muß der Dividendus der Wert eines Produkts sein, dessen einer Faktor der Divisor ist, oder, was dasselbe ist, es muß der Dividendus ein Vielfaches des Divisors sein, oder, was wieder dasselbe ist, es muß der Divisor ein Teiler des Dividendus sein. Im entgegengesetzten Falle ist die Verknüpfung der beiden Zahlen durch ein Divisionszeichen sinnlos. Z. B. ist 16 : 5 eine Quotientenform, der keine der bis jetzt definierten Zahlen gleichgesetzt werden kann. Die Arithmetik, treu dem Prinzip der Ausnahmslosigkeit (vgl. Anmerkung zu § 7), läßt jedoch auch derartige Quotientenformen in ihrer Sprache zu und erweitert damit von neuem (§ 7) den Zahlbegriff (§ 11).

Die Regel 2 in § 8 über das Multiplizieren von positiven und negativen Zahlen ergibt für die Division die Regel:

1. Zwei Zahlen mit Vorzeichen werden dividiert, indem man sie, abgesehen von ihren Vorzeichen, dividiert und das Vorzeichen nach der Gedächtnisregel bestimmt: „Gleiche

Vorzeichen geben bei der Division plus, ungleiche minus", ebenso wie bei der Multiplikation. Z. B.:

$$(+16):(+8)=+2, \quad (+16):(-8)=-2,$$
$$(-16):(+8)=-2, \quad (-16):(-8)=+2.$$

Der Beweis wird geführt, indem man zeigt, daß nach dieser Regel Divisor mal Quotient immer den Dividendus mit dem richtigen Vorzeichen ergibt.

Da $0 \cdot a$ stets 0 ist, gleichviel ob a positiv oder negativ ist, so muß umgekehrt 0 durch a immer 0 ergeben. Also:

2. Null dividiert durch eine positive oder negative Zahl gibt immer null.

Macht man aber bei der Gleichung $0 \cdot a = 0$ nicht a, sondern null zum Divisor, so ergibt sich: Null durch Null gleich a, d. h.:

3. Null dividiert durch Null kann jeder beliebigen Zahl gleichgesetzt werden. Dieselbe kann positiv, negativ und außerdem auch null sein, weil 0 mal 0 auch 0 ist. **0:0 ist daher eine vieldeutige Quotientenform.**

Es fragt sich noch, was für einer Zahl $a:0$ gleichzusetzen ist, wenn a positiv oder negativ ist. Da das Produkt von 0 mit keiner der bis jetzt definierten Zahlen eine positive oder eine negative Zahl ergibt, so muß die **Quotientenform a:0 vorläufig als sinnlos** erklärt werden. Daher:

4. Eine Division führt immer zu einem einzigen Ergebnis, wenn der Divisor nicht null ist. Ist der Divisor null und der Dividendus auch null, so ist die Division vieldeutig. Ist der Divisor null und der Dividendus nicht auch null, so ist die Division sinnlos.

Man kann daher $b:d$ nur dann gleich $b:d$ setzen, wenn man weiß, daß d nicht null ist. Ist d nicht null und $a = b$, $c = d$, so folgt aus $b:d = b:d$ die Gleichung $a:c = b:d$, d. h. in Worten:

5. Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches, wenn die Divisoren von Null verschieden sind.

Auf der Nichtbeachtung der Bedingung „wenn die Divisoren von Null verschieden sind" beruhen viele Trugschlüsse. Z. B.: Das Doppelte von b sei a. Dann hat man $4b = 2a$, also auch $14b - 10b = 7a - 5a$ oder $5a - 10b = 7a - 14b$ oder $5(a - 2b) = 7(a - 2b)$, woraus man, indem man den Faktor $a - 2b$ beiderseits fortläßt, den Schluß zieht, daß $5 = 7$ ist. Dieser Schluß ist ein Trugschluß, weil man den Faktor $a - 2b$ nicht beiderseits fortlassen darf, da $a - 2b$, der Annahme gemäß, den Wert null hat.

Die Formel II. der Überschrift $a \cdot b : b = a$ folgt aus der Erklärung der Division in folgender Weise. $a \cdot b : b$ muß die Zahl bedeuten, die, mit b multipliziert, $a \cdot b$ ergibt. Diese Bedingung erfüllt aber die Zahl a, und zwar nur die Zahl a, wenn b von Null verschieden ist. Dagegen ist $a \cdot 0 : 0$ gleich jeder beliebigen Zahl, also nicht notwendig gleich a. Die beiden Formeln I. und II. liefern zusammen die Regel:

6. Multiplikation und Division mit derselben Zahl heben sich auf, wenn diese nicht null ist.

Bei der Division zweier Potenzen von gleicher Basis sind daher die Exponenten zu subtrahieren, z. B.:

$$a^7 : a^4 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{(a\,a\,a\,a)\,a\,a\,a}{a\,a\,a\,a} = a\,a\,a = a^3.$$

Daraus, daß $x = a : b$ nur eine andere Ausdrucksweise für $x \cdot b = a$ ist, ergibt sich die für die Lösung von Gleichungen wichtige

Transpositionsregel zweiter Stufe: Eine Zahl, die auf der einen Seite einer Gleichung Faktor ist, kann dort fortgelassen und auf die andere Seite als Divisor geschrieben werden und umgekehrt. Z. B.:

Aus $x \cdot 4 = 12$ folgt $x = 12 : 4$;
aus $9 \cdot x = 27$ folgt $x = 27 : 9$;
aus $x : 8 = 5$ folgt $x = 5 \cdot 8$.

Diese Beispiele zeigen zugleich, wie durch Transponieren die **Isolierung** einer unbekannten Zahl und so die **Lösung von Gleichungen** bewerkstelligt werden kann.

Das Transponieren kann auch als eine Anwendung der beiden Sätze aufgefaßt werden: „Gleiches mit Gleichem multipliziert, gibt Gleiches" und „Gleiches durch Gleiches dividiert, gibt Gleiches, falls die Divisoren nicht null sind". Dividiert man z. B. $9 \cdot x = 27$ durch die Gleichung $9 = 9$, so erhält man, da $9 \cdot x : 9 = x$ ist, $x = 27 : 9 = 3$.

---

§ 10. Regeln für die zweite Stufe.

A. Gesetze nur für die zweite Stufe.

I. $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ (Verb.-Ges. d. Mult. § 8, VI),
II. $a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$,
III. $a : (b \cdot c) = a : b : c$,
IV. $a : (b : c) = a : b \cdot c$,
V. $a : b = (a \cdot q) : (b \cdot q)$,
VI. $a : b = (a : q) : (b : q)$.

B. Gesetze für die erste und zweite Stufe.

VII. $(a + b) \cdot m = a\,m + b\,m$
VIII. $(a - b) \cdot m = a\,m - b\,m$ (vgl. § 8, III. u. IV),

$$\text{IX.}\quad (a+b):m = a:m + b:m,$$
$$\text{X.}\quad (a-b):m = a:m - b:m.$$

Die Formeln I. bis VI. entsprechen genau den Formeln I. bis VI. des § 6, indem nur die Multiplikation an die Stelle der Addition, die Division an die Stelle der Subtraktion tritt. Ebenso müssen also auch die Beweise und die Übersetzungen in Worte entsprechend sein, Formel V. spricht aus, daß ein Quotient seinen Wert nicht ändert, wenn man ihn erweitert, d. h. Dividendus und Divisor mit derselben Zahl multipliziert. Formel VI. spricht aus, daß ein Quotient seinen Wert nicht ändert, wenn man ihn hebt, d. h. Dividendus und Divisor durch dieselbe Zahl dividiert.

Auch die vier in § 6 abgeleiteten Regeln haben hier ihre genauen Analoga. Namentlich beachte man:

Ein Ausdruck, der keine Klammern mehr enthält und in dem keine anderen Rechnungsarten vorkommen als Multiplikation und Division, wird berechnet, indem das Produkt aller Faktoren durch das Produkt aller Divisoren dividiert wird. Z. B..

$$5\cdot 9:3\cdot 8:6\cdot 5:25 = \frac{5\cdot 9\cdot 8\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 25} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5} = 2\cdot 2 = 4.$$

Von den Formeln VII. bis X. sind VII. und VIII. schon in § 8 bewiesen. Auf VII. beruht der Beweis von IX. und auf VIII. der von X. Um $(a+b):m = a:m+b:m$ zu beweisen, hat man nämlich, da die linke Seite ein Quotient ist, der, mit m multipliziert, $a+b$ gibt, zu prüfen, ob die rechte es auch tut. Dies ist der Fall, da $(a:m+b:m)\cdot m = a:m\cdot m + b:m\cdot m = a+b$ ist.

Analog ist der Beweis von X. In Worten lautet die Formel IV:

IX. (vorwärts gelesen): Eine Summe wird dividiert, indem man jeden Summanden dividiert und die erhaltenen Quotienten addiert.

IX. (rückwärts gelesen): Zwei Quotienten von gleichem Divisor werden addiert, indem man ihre Dividenden addiert und die erhaltene Summe durch den gleichen Divisor dividiert.

Ganz analog lautet die Übersetzung von Formel X.

Diese beiden Formeln geben, rückwärts gelesen, Regeln, wie Quotienten von gleichem Divisor addiert oder subtrahiert werden. Sind die Divisoren noch nicht gleich, so kann man durch Erweitern Quotienten mit gleichen Divisoren erzielen, und dann addieren oder subtrahieren, nämlich:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

Die Formel IX. kommt auch bei dem Verfahren in Anwendung, das man anwendet, um eine mehrziffrige Zahl zu dividieren, weil eine mehrziffrige Zahl eine Summe von Vielfachen der Zahlen 1, 10, 100, 1000 usw. ist. Z. B.:

$$\frac{7542}{9}=\frac{75\cdot 100+42}{9}=\frac{(8\cdot 9+3)\cdot 100+42}{9}$$

$$=8\cdot 100+\frac{3\cdot 100+42}{9}=8\cdot 100+\frac{34\cdot 10+2}{9}$$

$$=8\cdot 100+\frac{(3\cdot 9+7)\cdot 10+2}{9}=8\cdot 100+3\cdot 10+\frac{72}{9}$$

$$=8\cdot 100+3\cdot 10+8=838,$$

oder kürzer:

$$\begin{array}{l} 7542:9 = 800+30+8 \\ \underline{7200} \\ \;\;342 \\ \;\;\underline{270} \\ \;\;\;\;72 \\ \;\;\;\;\underline{72} \end{array}$$

oder noch kürzer:

$$\begin{array}{l} 7542:9 = 838. \\ \underline{72} \\ \;34 \\ \;\underline{27} \\ \;\;72 \\ \;\;\underline{72} \end{array}$$

Dasselbe Verfahren wendet man auch an, um eine Summe, die aus positiven oder negativen, Buchstaben enthaltenden Produkten besteht, zu dividieren, wie folgende Beispiele zeigen:

1. $(24m^2 + 6mn - 4m - 3n^2 - 2n):(2m + n) = \mathbf{12m - 3n - 2}$

$$\begin{array}{l} 24m^2 + 12mn \text{ (subt.)} \\ \hline \qquad -6mn - 4m - 3n^2 - 2n \\ \qquad -6mn \qquad\; - 3n^2 \text{ (subt.)} \\ \hline \qquad\qquad -4m \qquad - 2n \\ \qquad\qquad -4m \qquad - 2n \\ \hline \end{array}$$

2. $(15x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 7x + 4):(3x^2 - 2x + 1) = \mathbf{5x^2 + x + 4}$

$$\begin{array}{l} 15x^4 - 10x^3 + 5x^2 \\ \hline \qquad + 3x^3 + 10x^2 - 7x + 4 \\ \qquad + 3x^3 - 2x^2 + x \\ \hline \qquad\qquad + 12x^2 - 8x + 4 \\ \qquad\qquad + 12x^2 - 8x + 4 \\ \hline \end{array}$$

§ 11. Gebrochene Zahlen.

Erweiterung des Zahlbegriffs: I. $\frac{a}{b} \cdot b = a$, auch wenn b kein Teiler von a ist.

II. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$, $\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$.

III. $\frac{a}{p} + \frac{b}{p} = \frac{a + b}{p}$, $\frac{a}{p} - \frac{b}{p} = \frac{a - b}{p}$.

IV. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

V. $\frac{a}{b} = m + \frac{a - m b}{b}$, wo $a - m b < b$ ist.

Da bei der Erklärung der Division aus der Multiplikation das Produkt zum Dividendus wird, also Vielfaches des Divisors sein muß, so hat $\frac{a}{b}$, wenn a kein Vielfaches von b ist, zwar die Form eines Quotienten, aber dennoch gar keinen Sinn, weil $\frac{a}{b}$ dann weder ein Ergebnis des Zählens noch eine der in § 7 eingeführten Zahlen ist. Dem Prinzip der Ausnahmslosigkeit (vgl. Anm. zu § 7 auf S. 27) getreu, verstehen wir unter $\frac{a}{b}$ etwas, was, mit b multipliziert, a gibt. Dann dürfen wir mit der Quotientenform $\frac{a}{b}$ so rechnen, wie mit gewöhnlichen Quotienten. Mit $15:7$ verspricht man also z.B., daß man für $(15:7) \cdot 7$ genau 15 setzen will. Wenn Dividendus und Divisor einer solchen Quotientenform einen gemeinsamen Teiler haben, so kann man nach Formel VI. in § 10 durch diesen Teiler heben, z. B.:

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2}, \quad \frac{60}{75} = \frac{4}{5}, \quad \frac{12}{108} = \frac{1}{9}.$$

Indem man die eben besprochenen Quotientenformen auch Zahlen nennt, erweitert man den Zahlbegriff. Man nennt die neu definierten Zahlen *gebrochene Zahlen* oder *Brüche* im Gegensatz zu den in § 4 und § 7 definierten Zahlen, die *ganze* genannt werden. Die ganzen Zahlen können durch Erweitern auch die Form der Brüche erhalten, z. B.;

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \ldots$$

Deshalb müssen alle für Brüche geltenden Rechenregeln auch für ganze Zahlen gelten, wenn dieselben in Bruchform gedacht sind. Beim Schreiben der gebrochenen Zahlen wendet man als Divisionszeichen meist den wagerechten Strich und nicht den Doppelpunkt an. Statt Dividendus sagt man auch „Zähler“, statt Divisor „Nenner“. Statt a durch b sagt man auch a-b-tel (tel entstanden aus Teil), z. B. fünf achtel. Einen Bruch umkehren heißt, einen neuen Bruch bilden, dessen Zähler der Nenner des ursprünglichen Bruchs ist, und umgekehrt. Der Bruch, welcher durch Umkehrung eines andern entsteht, heißt sein reziproker Wert. So sind $\frac{4}{3}$ und $\frac{3}{4}$, sowie $\frac{1}{5}$ und 5 einander reziprok.

Da alle für Quotienten aufgestellten Rechengesetze auch für Brüche gelten müssen, so ist eine Zusammenstellung der Gesetze, nach denen mit Brüchen zu rechnen ist, überflüssig. Aus praktischen Gründen stellen wir jedoch nochmals die Regeln zusammen, nach denen Brüche addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden.

1. Zwei Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man sie durch Erweitern auf gleichen Nenner bringt, dann von den so erhaltenen Brüchen die Zähler addiert oder subtrahiert, und schließlich einen Bruch bildet, dessen Zähler die erhaltene Summe oder Differenz ist, und dessen Nenner der gemeinsame Nenner der erweiterten Brüche ist. Z. B.:

$$\frac{4}{3}+\frac{1}{9}=\frac{12}{9}+\frac{1}{9}=\frac{13}{9}; \quad \frac{5}{6}-\frac{7}{9}=\frac{15}{18}-\frac{14}{18}=\frac{1}{18};$$

$$4-\frac{7}{11}=\frac{4}{1}-\frac{7}{11}=\frac{44}{11}-\frac{7}{11}=\frac{37}{11};$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{6}{12}+\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{23}{12}.$$

Der bei der Addition oder Subtraktion zu bestimmende gemeinsame Nenner heißt Generalnenner. Bei der Addition von Brüchen mit den Nennern 3, 6, 8 ist z. B. 24 der Generalnenner, weil 24 die kleinste Zahl ist, die Vielfaches von jeder der drei Zahlen 3, 6, 8 ist.

2. Zwei Brüche werden multipliziert, indem man einen Bruch bildet, dessen Zähler das Produkt ihrer Zähler und dessen Nenner das Produkt ihrer Nenner ist. Z. B.:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{28}; \quad \frac{4}{7}\cdot 6=\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{1}=\frac{24}{7}; \quad \frac{4}{9}\cdot\frac{27}{8}=\frac{4\cdot 27}{9\cdot 8}=\frac{4\cdot 3\cdot 9}{9\cdot 2\cdot 4}=\frac{3}{2}.$$

3. Ein Bruch wird durch einen andern Bruch dividiert, indem man den als Divisor genommenen Bruch umkehrt, und mit dem so entstandenen neuen Bruch den als Dividendus genommenen Bruch multipliziert. Z. B.:

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{9}=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{5}=\frac{27}{20}; \quad \frac{3}{4}:7=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{28}; \quad 5:\frac{2}{3}=5\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{2}.$$

Die Vereinigung der in § 7 gewonnenen Erweiterung des Zahlbegriffs mit der hier gewonnenen führt durch Wiederholung der Betrachtungen des § 7 für gebrochene Zahlen zum Begriff der positiven oder negativen gebrochenen Zahl. Das Rechnen mit solchen Zahlen zeigen folgende Beispiele:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)=-\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)=-\frac{4}{5},$$

$$\left(-\frac{7}{11}\right)+\left(+\frac{4}{11}\right)=-\left(\frac{7}{11}-\frac{4}{11}\right)=-\frac{3}{11};$$

$$\left(-\frac{1}{8}\right)-\left(-\frac{5}{8}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=+\frac{4}{8}=+\frac{1}{2};$$

$$\left(+\frac{5}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{5\cdot 3}{7\cdot 4}=-\frac{15}{28}; \qquad \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$=+\frac{1\cdot 2}{8\cdot 9}=+\frac{1}{36};$$

$$\left(-\frac{3}{8}\right):\left(+\frac{6}{7}\right)=-\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{6}\right)=-\frac{7}{16};$$

$$\left(-\frac{1}{12}\right):\left(-\frac{25}{24}\right)=+\frac{1\cdot 24}{12\cdot 25}=+\frac{2}{25};$$

$$0\cdot\left(+\frac{5}{6}\right)=0; \qquad 0:\left(-\frac{4}{3}\right)=0.$$

Jede der bisher definierten Zahlen ist also: entweder positiv-ganz oder null oder negativ-ganz oder positiv-gebrochen oder negativ-gebrochen.

Unterwirft man solche Zahlen den Rechnungsarten erster und zweiter Stufe oder, wie es beim Rechnen heißt, den vier Spezies, so muß immer wieder eine ebensolche Zahl erscheinen, ausgenommen nur, wenn eine Division durch Null vorkommt, z. B.:

$$+\left[8-\left(-\frac{5}{6}\right)\right]\cdot\frac{7}{8}:(-6)=\left[8+\frac{5}{6}\right]\cdot\frac{7}{8}:(-6)$$

$$=\frac{53}{6}\cdot\frac{7}{8}:(-6)=\frac{371}{48}:(-6)=-\frac{371}{288}.$$

Um die Analoga der in § 8 bewiesenen Vergleichungsschlüsse für die Division zu finden und sie

zugleich auch auf den Fall auszudehnen, daß die Divisionen zu gebrochenen Zahlen führen, nennen wir allgemein a *größer als* b, wenn $a - b$ eine positive ganze oder gebrochene Zahl, und a *kleiner als* b, wenn $a - b$ eine negative ganze oder gebrochene Zahl ist. Ferner setzen wir voraus, daß a, b, c, d positiv sind. Liegt dann erstens $\left\{\begin{matrix} a > b \\ c = d \ \text{(div.)} \end{matrix}\right\}$ vor, so setzen wir $a = b + p$, wo nun p positiv sein muß, und erhalten $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} + \frac{p}{d}$, d. h. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. Liegt zweitens $\left\{\begin{matrix} a = b \\ c > d \ \text{(div.)} \end{matrix}\right\}$ vor, so setzen wir $c = d + q$, wo nun q positiv sein muß, und erhalten zunächst $\frac{a}{c} = \frac{b}{d+q}$. Für $\frac{b}{d+q}$ kann man aber schreiben $\frac{b}{d} - \frac{bq}{d(d+q)}$, also $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} - \frac{bq}{d(d+q)}$, d. h. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$. Dasselbe erhält man, wenn $\left\{\begin{matrix} a < b \\ c > d \ \text{(div.)} \end{matrix}\right\}$ vorliegt. Wir erhalten daher die drei Vergleichungs-Schlüsse:

$a > b$	$a = b$	$a < b$
$c = d$ (div.)	$c > d$ (div.)	$c > d$ (div.)
$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$	$\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$	$\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

und die drei Schlüsse, welche hieraus durch Rückwärtslesen entstehen. In Worten:

Man gelangt zu Größerem, wenn man erstens Größeres durch Gleiches, zweitens Gleiches durch Kleineres, drittens Größeres durch Kleineres dividiert. Man gelangt zu Kleinerem, wenn man erstens Kleineres durch Gleiches, zweitens Gleiches durch Größeres, drittens Kleineres durch Größeres

dividiert. Dabei ist vorausgesetzt, daß die vier in Betracht kommenden Zahlen positiv sind.

Dividiert man, mit Beachtung der eben bewiesenen Regel, $a > b$, $a = b$, $a < b$ durch $b = b$, so sieht man, daß der Bruch $\frac{a}{b}$ größer, gleich oder kleiner als 1 ist, je nachdem der Zähler a größer als der Nenner b oder gleich dem Nenner b oder kleiner als der Nenner b ist. Wenn Brüche, die im Zähler und Nenner positive Zahlen haben, kleiner als 1 sind, so heißen sie echt, sind sie größer als 1, unecht. Z. B. $\frac{5}{7}$ ist echt, $\frac{5}{3}$ unecht. Wenn $\frac{a}{b}$ ein unechter Bruch ist, so kann man für ihn setzen $1 + \frac{a-b}{b}$, weil diese Summe gleich $1 + \frac{a}{b} - 1 = \frac{a}{b}$ ist. Dann ist jedenfalls $a - b$ positiv. Ist nun auch $\frac{a-b}{b}$ unecht, so kann man dieses Verfahren wiederholen und gelangt zu $\frac{a}{b} = 2 + \frac{a-2b}{b}$. Setzt man dieses Verfahren so lange fort, bis der rechts entstehende Bruch echt wird, so erhält man

$$\frac{a}{b} = m + \frac{a - mb}{b},$$

wo $a - mb < b$ ist. (Formel V der Überschrift.)

Hiernach ist also jeder positive unechte Bruch entweder gleich einer positiven ganzen Zahl oder gleich der Summe einer positiven ganzen Zahl und eines positiven echten Bruches. Z. B. $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$, $\frac{36}{3} = 12$, $\frac{92}{5} = 18 + \frac{2}{5}$.

Die Summe einer positiven ganzen Zahl und eines positiven echten Bruches nennt man „gemischte Zahl“. Jeder unechte Bruch läßt sich also in eine gemischte Zahl verwandeln, und liegt deshalb, seinem Werte nach, zwischen zwei ganzen Zahlen. Bei gemischten Zahlen pflegt man das Pluszeichen fortzulassen, z. B. $18\frac{2}{5} = 18 + \frac{2}{5}$. Negative Brüche kann man auch immer in Summen von negativen Zahlen und positiven oder negativen echten Brüchen verwandeln, z. B.:

$$-\frac{16}{9} = -1 - \frac{7}{9} = -2 + \frac{2}{9}.$$

Überhaupt läßt sich also jeder Bruch, mag er positiv oder negativ sein, als Summe einer ganzen Zahl und eines positiven echten Bruches darstellen. Z. B.:

$$\frac{19}{4} = 4 + \frac{3}{4}, \; \frac{3}{5} = 0 + \frac{3}{5}, \; -\frac{3}{5} = -1 + \frac{2}{5}, \; -\frac{19}{12} = -2 + \frac{5}{12}.$$

Faßt man die Verwandelung eines unechten Bruches $\frac{a}{b}$ in eine gemischte Zahl $m + \frac{r}{b}$ als ein Divisions-Exempel auf, so nennt man m die Ganzen, r den Rest. Der Rest ist immer kleiner als der Divisor.

Der Verwandelung eines unechten Bruches in eine gemischte Zahl ist analog die Verwandelung des Quotienten zweier algebraischer Summen in die Summe einer algebraischen Summe und eines Quotienten, der den Rest zum Dividendus hat, wie folgende Beispiele zeigen:

1. $$(x^4 + 1) : (x^2 + 1) = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}.$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^4 + x^2} \\ -x^2 + 1 \\ \underline{-x^2 - 1} \\ \quad +2 \text{ (Rest).} \end{array}$$

2. $(x^3 - 5x^2 + 2x - 3) : (x^2 - 3) = x - 5 + \frac{5x - 18}{x^2 - 3}$.

$$\begin{array}{l} x^3 - 3x \\ \hline -5x^2 + 5x - 3 \\ -5x^2 + 15 \\ \hline +5x - 18 \text{ (Rest)}. \end{array}$$

Die Quotientenform $\frac{a}{x}$, wo x null und a positiv ist, war als sinnlos erkannt. Dieselbe erhält dadurch Sinn, daß man x als veränderlich betrachtet und immer kleiner werden läßt. Wird x kleiner als ein Milliontel, so wird $\frac{a}{x}$ mehr als millionenmal a, ist x kleiner als ein Trilliontel, so wird $\frac{a}{x}$ mehr als trillionenmal a, usw. Es ist also möglich, $\frac{a}{x}$ größer zu machen, als jede noch so große Zahl, wenn man nur x hinreichend klein annimmt. Diese Wahrheit drückt die Arithmetik kurz so aus:

$$\frac{a}{0} = \infty \text{ (gelesen: unendlich groß).}$$

Ebenso erkennt man, daß $\frac{a}{x}$ kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine Zahl, wenn man nur x hinreichend groß annimmt, eine Wahrheit, die die Arithmetik kurz so ausdrückt:

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

Hiernach können auch folgende Formeln als richtig erkannt werden:

$\infty + a = \infty; \quad \infty - a = \infty, \quad a - \infty = -\infty, \quad \frac{\infty}{a} = \infty.$

Ebenso wie $\frac{0}{0}$ sind vieldeutig die Formen:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0 \text{ und } \infty - \infty.$$

IV. Abschnitt.

Anwendungen der Rechnungsarten erster und zweiter Stufe.

§ 12. Entwickeln und Vereinfachen.

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
III. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
IV. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^3b + 3ab^2 - b^3$,
V. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
VI. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
VII. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Von der Richtigkeit der obigen Formeln überzeugt man sich durch Auflösen der Klammern nach den in § 10 gegebenen Regeln. Die Anwendung dieser Formeln zeigen folgende Beispiele:

1. $(x + 1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$,
2. $(3a - 2)^2 = (3a)^2 - 2(3a) \cdot 2 + 2^2 = 9a^2 - 12a + 4$,
3. $(2x + y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 y + 3(2x) y^2 + y^3$
$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$,
4. $(3p - 1)^3 = (3p)^3 - 3(3p)^2 . 1 + 3(3p) . 1^2 - 1^3$
$= 27p^3 - 27p^2 + 9p - 1$,
5. $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$,

6. $8a^3 - 1 = (2a)^3 - 1^3 = (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$,

7. $p^3 + \frac{1}{8} = p^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(p + \frac{1}{2}\right)\left(p^2 - \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}\right)$.

Aus den Formeln V. bis VII. gehen durch Transponieren die folgenden bei Divisionen brauchbaren Formeln hervor:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b, \quad \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b,$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2, \quad \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2.$$

Beispiele:

$$\frac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 3x + 1, \quad \frac{p^4 - q^4}{p^2 + q^2} = p^2 - q^2,$$

$$\frac{27 - a^3}{3 - a} = 9 + 3a + a^2, \quad \frac{x^3 + \frac{1}{8}}{x + \frac{1}{2}} = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

Eine Summe mit positiven oder negativen Gliedern heißt entwickelt, wenn dieselbe möglichst wenig Glieder hat, wenn jedes ihrer Glieder ein Produkt von einem oder mehreren Faktoren ist, wenn ferner jeder dieser Faktoren entweder eine positive ganze Zahl oder ein einfacher Buchstabe ist, und wenn schließlich die in einem Gliede etwa auftretenden gleichen Faktoren durch eine Potenz zusammengefaßt sind. Entwickelt sind z. B. die folgenden algebraischen Summen:

$$4ab - c + 7de + 15, \quad 3a^4 - 16bcd + 9,$$

$$x^4 - x^3 - x^2 + x + 1, \quad x^3 - 12x^2y + y^3.$$

Jeder Ausdruck, der keine unausführbaren Divisionen enthält, läßt sich durch Auflösen der Klammern usw. entwickeln, d. h. in eine entwickelte Summe verwandeln. Z. B.:

$4(a+b)c - 4(a+c)(b-d) = 4ac - 4ab + 4ad + 4cd,$
$[(e+f)^2 - 9ef:3](e+f) = (e^2 - ef + f^2)(e+f) = e^3 + f^3.$

Jeder Ausdruck, in welchem nur die vier Rechnungsarten erster und zweiter Stufe auftreten, läßt sich auf die Hauptform bringen, d. h. in einen Quotienten verwandeln, dessen Dividendus und dessen Divisor entwickelte Summen sind. In besonderen Fällen kann auch eine solche Summe sich auf ein einziges Glied reduzieren, und dieses kann möglicherweise ein bloßer Buchstabe oder eine bloße Zahl sein. Auch kann der Divisor 1 sein und deshalb die Hauptform eine entwickelte algebraische Summe sein. Um einen Ausdruck auf die Hauptform zu bringen, hat man außer dem Lösen von Klammern namentlich noch zweierlei zu tun. Erstens hat man immer nach § 10 und § 11 eine Summe von positiven oder negativen Quotienten in einen einzigen Quotienten zu verwandeln. Zweitens hat man immer aus einem Quotienten, dessen Dividendus und Divisor selbst noch Quotienten enthält, diese letzteren fortzuschaffen. Dies geschieht dadurch, daß man Dividendus und Divisor mit einem passend gewählten Faktor multipliziert. Durch Bringen auf die Hauptform verwandelt sich z. B.:

1. $\frac{33a}{16} - \frac{\frac{45}{2}a^2 + 9ab}{4(3a+b)}$ in $\frac{9a^2 - 3ab}{48a + 16b}$,

2. $\frac{5a + 2b + 1}{5} - \frac{3a^2 + ab - 1}{3a} - \frac{5 + 3a}{15a}$ in $\frac{b}{15}$,

3. $\left[\frac{a-1}{3p} + \frac{3\cdot(-p)}{a-1}\right] : \left(\frac{1}{3p} - \frac{1}{a-1}\right)$ in $a + 3p - 1$,

4. $\frac{\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}}{p^2 + q^2}\cdot(p^2 - q^2) - \frac{(p+q)^2 - p^2 - q^2}{p^3 + pq^2}$ in 0.

§ 13. Proportionen.

Aus $a:b = c:d$ folgt:

I. $a\,d = b\,c$ oder $d = b\,c:a$, $c = a\,d:b$, $b = a\,d:c$, $a = b\,c:d$;

II. $a:c = b:d$, $b:a = d:c$, $b:d = a:c$, $c:a = d:b$ etc.;

III. $(m\,a):(m\,b) = c:d$, $(m\,a):b = (m\,c):d$ etc.;

IV. $(a+b):(c+d) = a:c$, $(a+b):(c+d) = b:d$, $(a+c):(b+d) = a:b$ etc.;

V. $(a-b):(c-d) = a:c$, $(a-b):(c-d) = b:d$, $(a-c):(b-d) = a:b$ etc.;

VI. $(a+b):(a-b) = (c+d):(c-d)$, $(a+c):(a-c) = (b+d):(b-d)$;

VII. $(m\,a+n\,b):(p\,a+q\,b) = (m\,c+n\,d):(p\,c+q\,d)$.

In gewissen Anwendungen pflegt man den Quotienten zweier Zahlen auch ihr Verhältnis und die Gleichsetzung zweier Verhältnisse eine Proportion zu nennen. Die allgemeine Form einer Proportion ist also:

$$a:b = c:d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

gelesen: „a (verhält sich) zu b wie (sich) c zu d (verhält)".

Hier heißen a und b Vorderglieder, c und d Hinterglieder, a und c sowie b und d homologe Glieder, a und d äußere Glieder, b und c innere Glieder. Das vierte Glied d nennt man die vierte Proportionale zu den drei anderen. So ist in $4:7 = 12:21$ die Zahl 21 die vierte Proportionale zu 4, 7, 12. Durch Multiplikation von $a:b = c:d$ mit $b\,d$ ergibt sich:

$$a \cdot d = b \cdot c,$$

d. h. in Worten: Bei einer Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der inneren Glieder. Umgekehrt

folgt aus $a \cdot d = b \cdot c$, indem man durch $b \cdot d$ dividiert, die Proportion $a : b = c : d$, d. h. in Worten: Aus der Gleichheit zweier Produkte entsteht eine richtige Proportion, wenn man die Faktoren des einen Produkts zu inneren, die des anderen zu äußeren Gliedern macht. Es ergibt z. B. $4 \cdot 16 = 2 \cdot 32$ die Proportion: $4 : 2 = 32 : 16$. Durch Anwendung der Transpositionsregel zweiter Stufe (vgl. § 9) kann man immer jedes Glied einer Proportion aus den drei anderen finden. Es folgt z. B. aus:

$$6 : 8 = 15 : x, \quad x = \frac{8 \cdot 15}{6} = 20.$$

Aus der Gleichung zweier Produkte können acht Proportionen erschlossen werden. Daher liefert jede Proportion durch Umstellung der Glieder sieben neue Proportionen. Z. B.:

$4 : 2 = 32 : 16$ liefert $4 : 32 = 2 : 16$, $2 : 4 = 16 : 32$, $2 : 16 = 4 : 32$, $32 : 16 = 4 : 2$, $32 : 4 = 16 : 2$, $16 : 32 = 2 : 4$, $16 : 2 = 32 : 4$.

Bei einer Proportion dürfen auch zwei Vorderglieder oder zwei Hinterglieder oder zwei homologe Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert werden. Denn aus $a \cdot d = b \cdot c$ folgt $(m\,a) \cdot d = (m\,b) \cdot c$ oder $a \cdot (md) = b \cdot (m\,c)$ oder $(m\,a) \cdot d = b \cdot (m\,c)$ und $\frac{a}{m} \cdot d = \frac{b}{m} \cdot c$ oder $a \cdot \frac{d}{m} = b \cdot \frac{c}{m}$ oder $\frac{a}{m} \cdot d = b \cdot \frac{c}{m}$, woraus neue Proportionen hervorgehen, bei denen die Vorderglieder, die Hinterglieder oder homologe Glieder mit m multipliziert oder dividiert erscheinen.

Die beiden Vorderglieder oder die beiden Hinterglieder dürfen auch gleichbenannte Zahlen sein, ja es kann auch die Benennung der beiden Vorder-

glieder von der der beiden Hinterglieder verschieden sein, weil der Quotient gleichbenannter Zahlen unbenannt ist. Z. B.:

$$27 \text{ hl} : 24 \text{ hl} = 45 \mathcal{M} : 40 \mathcal{M} .$$

Wenn $a : b = c : d$ eine richtige Proportion ist, so muß $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ sein. Bezeichnet man jeden dieser beiden gleichen Brüche mit ϱ, so erhält man:

$$a = \varrho c, \quad b = \varrho d .$$

Multipliziert man die erste dieser beiden Gleichungen mit m, die zweite mit n, und addiert dann, so erhält man:

$$m a + n b = \varrho (m c + n d) .$$

Nimmt man statt m und n aber p und q, so erhält man in derselben Weise:

$$p a + q b = \varrho (p c + q d) .$$

Durch Division der beiden Gleichungen entsteht die Proportion VII:

$$(m a + n b) : (p a + q b) = (m c + n d) : (p c + q d) ,$$

wo m, n, p, q beliebige Zahlen sind. Dadurch, daß man diese vier Zahlen teils gleich $+1$, teils gleich -1, teils gleich 0 setzt, entstehen die mit IV, V, VI bezeichneten Proportionen, z. B. die erste unter VI, wenn man $m = n = 1$, $p = 1$, $q = -1$ setzt.

Eine Proportion heißt stetig, wenn ihre mittleren Glieder gleich sind, z. B.: $4 : 6 = 6 : 9$. Das letzte Glied, hier 9, heißt dann die dritte Proportionale der beiden anderen Glieder, und das mittlere Glied, hier 6, die mittlere Proportionale oder das **geometrische Mittel** der beiden anderen.

Früher nannte man die Gleichheit zweier Differenzen eine arithmetische Proportion, z. B. $4 - 7 = 8 - 11$. Sind bei einer solchen arithmetischen Proportion die, mittleren Glieder beide gleich, so ist jedes von ihnen gleich der halben Summe der beiden anderen Glieder. Darum nennt man noch heute die halbe Summe zweier Zahlen ihr arithmetisches Mittel. Zu a und b heißt also das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$, das geometrische Mittel zu a und b ist dagegen die Zahl, die, mit sich selbst multipliziert, $a \cdot b$ ergibt. Ein drittes Mittel zu a und b ist das harmonische, das gleich $\frac{2ab}{a+b}$ ist. Nennt man dasselbe h, so ergibt sich:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

d. h.: Das arithmetische Mittel der reziproken Werte von a und b ist der reziproke Wert des harmonischen Mittels zu a und b. Zwischen dem arithmetischen Mittel m, dem geometrischen Mittel g und dem harmonischen Mittel h derselben beiden Zahlen besteht die Beziehung:

$$m : g = g : h,$$

denn $m \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = a \cdot b$ und $g \cdot g = a \cdot b$.

Wenn $a : a' = b : b' = c : c'$ ist, so schreibt man dafür kürzer:

$$a : b : c = a' : b' : c'$$

und nennt das eine laufende Proportion. Ebenso ist:

$$a : b : c : d = a' : b' : c' : d'$$

eine laufende Proportion, welche ausspricht, daß sowohl $a : a' = b : b'$, als auch $a : a' = c : c'$, als auch $a : a' = d : d'$ ist, woraus dann auch etwa $b : b' = d : d'$ sich von

selbst ergibt. Viele Eigenschaften der gewöhnlichen Proportionen lassen sich auf laufende Proportionen übertragen. So kann z. B. aus $a:b:c = a':b':c'$ geschlossen werden:

$$pa:qb:rc = pa':qb':rc'$$

oder: $(a+b+c):(a'+b'+c') = a:a' = b:b' = c:c'$, eine Beziehung, die in der Gesellschafts- und Teilungsrechnung Anwendung findet.

Proportionen zusammensetzen heißt, eine neue Proportion bilden, deren Glieder die Produkte der entsprechenden Glieder der ursprünglichen Proportionen sind; z. B.:

1. $\begin{cases} a:b = c:d \\ a':b' = c':d' \end{cases}$
$(aa'):(bb') = (cc'):(dd')$

2. $\begin{cases} 3:\ 5 = 9:x \\ 4:\ 6 = 8:y \end{cases}$
$12:30 = 72:(xy)$

3. $\begin{cases} a:b = 8:\ 9 \\ b:c = 9:10 \end{cases}$
$a:c = 8:10$

4. $\begin{cases} a:b = 2:3 \\ b:c = 4:5 \\ c:d = 14:5 \end{cases}$
$a:d = 112:75.$

Zwei Dinge heißen direkt proportional, wenn eine Vervielfachung des einen eine Vervielfachung des anderen mit demselben Faktor herbeiführt. So sind direkt proportional: Weg und Zeit bei gleicher Geschwindigkeit, Prozentzahl und Zinsen bei gleichem Kapital, Vorrat und Verbrauchszeit bei gleicher Konsumentenzahl. Zwei Dinge heißen umgekehrt proportional, wenn eine Vervielfachung des einen eine Teilung des anderen herbeiführt, so daß der Multiplikator und der Divisor gleich werden. So sind indirekt proportional: Geschwindigkeit und Zeit bei gleichem Wege, Konsumentenzahl und Verbrauchszeit bei gleichem Vorrat, Gewicht und Hubhöhe bei gleichem Arbeitsquell.

§ 14. Eigenschaften der natürlichen Zahlen, Zahlsysteme.

Unter „Zahl" soll hier immer eine natürliche Zahl, ein Ergebnis des Zählens (§ 4) verstanden werden. Sind a, b und a:b ganze Zahlen, so heißt b Teiler von a und a Vielfaches von b. Zahlen, die 2 zum Teiler haben, heißen gerade, die 2 nicht zum Teiler haben, ungerade. Jede Zahl, die nur 1 und sich selbst zu Teilern hat, heißt Primzahl, z. B. 7, 19, 31. Jede Zahl, die noch außerdem Teiler hat, heißt zusammengesetzt, z. B. 18, 35, 91. Dividiert man fortgesetzt durch solche Teiler, so werden die Quotienten immer kleiner, bis schließlich eine Primzahl erscheinen muß. Deshalb ist jede zusammengesetzte Zahl als Produkt von Primzahlen darstellbar. Wenn man diese Primzahlen nach ihrer Größe ordnet und die gleichen Primfaktoren durch einen Exponenten zusammenfaßt, so heißt die Zahl „in ihre Primfaktoren zerlegt". Z. B.:

$$48 = 2^4 \cdot 3,\ 72 = 2^3 \cdot 3^2,\ 98 = 2 \cdot 7^2,\ 1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13,\ 1896 = 2^3 \cdot 3 \cdot 79.$$

Denkt man sich alle Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge geschrieben und dann nacheinander die durch 2, durch 3, durch 5 usw. teilbaren Zahlen fortgestrichen, so behält man nur die Primzahlen übrig (Sieb des Eratosthenes).

Geht man in der Zahlenreihe vorwärts, so stößt man, wenn auch allmählich seltener, immer wieder auf Primzahlen, so daß keine Primzahl denkbar ist, zu welcher nicht eine noch größere gefunden werden kann. Denn wäre etwa a die größte aller Primzahlen, so müßte das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots a$ aller möglichen Primzahlen durch jede existierende

Primzahl teilbar sein. Es müßte also die auf dieses Produkt folgende Zahl bei der Division durch jede existierende Primzahl den Rest 1 übrig lassen, also selbst Primzahl sein, was der Annahme, a sei die größte aller Primzahlen, widerspricht.

Die Zerlegung einer Zahl führt auch zu ihren sämtlichen Teilern, wie folgende Beispiele zeigen:

1. $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, daher sind Teiler: $1, 2, 2^2, 2^3, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 2^2, 5 \cdot 2^3, 5 \cdot 3 \cdot 1, 5 \cdot 3 \cdot 2, 5 \cdot 3 \cdot 2^2, 5 \cdot 3 \cdot 2^3, 5^2 \cdot 1, 5^2 \cdot 2, 5^2 \cdot 2^2, 5^2 \cdot 2^3, 5^2 \cdot 3 \cdot 1, 5^2 \cdot 3 \cdot 2, 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2, 5^2 \cdot 3 \cdot 2^3$;
2. $648 = 2^3 \cdot 3^4$, daher sind Teiler: $1, 2, 2^2, 2^3, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 3^2 \cdot 1, 3^2 \cdot 2, 3^2 \cdot 2^2, 3^2 \cdot 2^3, 3^3 \cdot 1, 3^3 \cdot 2, 3^3 \cdot 2^2, 3^3 \cdot 2^3, 3^4 \cdot 1, 3^4 \cdot 2, 3^4 \cdot 2^2, 3^4 \cdot 2^3$.

Hiermit hängt die Aufgabe zusammen, die Summe aller Teiler einer Zahl zu finden, wo 1 und die Zahl selbst als Teiler mitgerechnet sind. Die Lösung dieser Aufgabe ist aus folgenden Beispielen ersichtlich:

Da $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ ist, so ist die Teilersumme: $(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3)(1 + 5 + 5^2) = 15 \cdot 4 \cdot 31 = 1860$;

Da $648 = 2^3 \cdot 3^4$ ist, so ist die Teilersumme: $(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = 15 \cdot 121 = 1815$.

Eine Zahl heißt *vollkommen*, wenn ihre Teilersumme doppelt so groß ist, wie sie selbst. Vollkommene Zahlen sind 6, 28, 496 und überhaupt alle Zahlen von der Form $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, wo $2^p - 1$ Primzahl ist.

Wenn die Zahl a, durch t geteilt, den Quotienten q und den Rest r ergibt, so ist (§ 11) $a = t \cdot q + r$, wo $r < t$ ist. Man nennt dann a in der *Form* $t \cdot q + r$ dargestellt. Alle geraden Zahlen haben z. B. die Form $2n$, alle ungeraden die Form $2n + 1$.

Wenn eine Zahl a die Form $tq + r$ und eine Zahl a' die Form $tq' + r'$ hat, so folgt aus $a = a'$ die Gleichung $tq + r = tq' + r'$ oder $r - r' = t(q' - q)$, d. h. $r - r'$ ist durch t teilbar. Da aber r und r' kleiner als t sind, also erst recht $r - r'$ kleiner als t ist, so muß $r - r'$ null sein. Daher $r = r'$ und $q = q'$. Deshalb gilt der Satz:

Die Reste, welche man aus den beiden Seiten einer Gleichung bei der Division durch eine und dieselbe Zahl erhält, sind immer gleich.

Um mit Hilfe dieses Satzes Restregeln zu beweisen, bezeichne man die Einer einer Zahl N mit a_0, die Zehner mit a_1, die Hunderter mit a_2 usw., also:

$$N = a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + 10^3 \cdot a_3 + \ldots$$

Da nun 10 durch 2, 10^2 durch 2^2, 10^3 durch 2^3 usw. teilbar ist, so ergibt sich die folgende

Restregel für 2, 4, 8, usw.: Eine Zahl läßt, durch 2 dividiert, denselben Rest wie ihre letzte Ziffer, ferner, durch 4 dividiert, denselben Rest wie die aus den beiden letzten Ziffern bestehende Zahl usw.

Analog lauten die Restregeln für 5, 25, 125 ..., weil 10 durch 5, 10^2 durch 5^2 usw. teilbar ist.

Schreibt man $N = a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \ldots$ in der Form:

$$N = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) + 9 \cdot (a_1 + 11 a_2 + 111 \cdot a_3 + \ldots),$$

so erkennt man die Richtigkeit der folgenden

Restregel für 3 und für 9: Eine Zahl läßt, durch 3 bzw. durch 9 dividiert, denselben Rest wie die Summe ihrer Ziffern (Quersumme).

Schreibt man ferner N in der Form:

$$N = (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots) + (11 \cdot a_1 + 99 \cdot a_2 + 1001 \cdot a_3 + \ldots)$$

und beachtet man, daß $10^2 - 1$, $10^3 + 1$, $10^4 - 1$ usw.

durch $10+1$ teilbar sein müssen (§ 12), so erhält man eine Restregel für 11.

Aus den Restregeln ergeben sich die aus dem Rechnen bekannten **Teilbarkeitsregeln**, wenn man den Rest gleich null setzt.

Mit Hilfe der Restregel für 9 findet man bei einer Zahl oder einem Zahlen-Ausdruck den Rest, der bei der Teilung durch 9 bleibt, viel schneller, als wenn man die Division ausführt. Um z. B. den Neunrest von 784582 zu finden, verfährt man so: $7+8=15$, 15 hat die Ziffern 1 und 5, $1+5=6$, $6+4=10$, $1+0=1$, $1+5=6$, $6+8=14$, $1+4=5$, $5+2=7$.

Jede Zahl, welche r als Neunrest besitzt, hat die Form $9n+r$.

Da nun $(9n+r)(9n'+r')=9(9nn'+nr'+n'r)+rr'$ ist, so gilt der Satz: Den Neunrest des Produktes zweier Zahlen erhält man, wenn man ihre Neunreste multipliziert und zu dem erhaltenen Produkte den Neunrest bestimmt. Die Anwendung dieses Satzes heißt **Neunerprobe**. Z. B.:

Faktor: 7346	Neunrest: 2
Faktor: 834	Neunrest: 6
29384	Produkt: 12
22038	Neunrest: 3
58768	
6126564	Neunrest: 3

Haben Zahlen außer 1 keinen Teiler gemeinsam, so heißen sie relativ-prim, z. B. 14 und 15, ferner 39, 16, 49. Sind Zahlen nicht relativ-prim, so entsteht die Aufgabe, ihren größten gemeinsamen Teiler

zu finden. Dies geschieht dadurch, daß man die Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt, und dann ein Produkt bildet, das jeden Primfaktor so oft enthält, als er da steht, wo er am seltensten vorkommt. Z. B.:

$$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$
$$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$
$$1386 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$$

Der größte gemeinsame Teiler muß die 2 einmal, die 3 zweimal, 5, 7, 11 gar nicht als Faktor enthalten, daher $2 \cdot 3^2 = \mathbf{18}$.

Abgekürzt:

	900, 378, 1386
2)	450, 189, 693
9)	50, 21, 77, daher $2 \cdot 9 = \mathbf{18}$ der gem. Teiler.

Um das kleinste gemeinsame Vielfache zu finden, d. h. um die kleinste Zahl zu bestimmen, von welcher alle gegebenen Zahlen Teiler sind, muß man ein Produkt bilden, daß jeden vorkommenden Primfaktor so oft enthält, als er da steht, wo er am häufigsten vorkommt. Z. B.:

$$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$
$$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$
$$1386 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache muß die 2 zweimal, die 3 dreimal, die 5 zweimal, die 7 einmal, die 11 einmal enthalten, daher $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = \mathbf{207900}$.

Abgekürzt:

	900, 378, 1386
2)	450, 189, 693
9)	50, 21, 77
7)	50, 3, 11, dah. $2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 50 \cdot 3 \cdot 11 = \mathbf{207900}$.

Die Aufsuchung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen ist namentlich bei der Addition und Subtraktion von Brüchen mit verschiedenen Nennern erforderlich. (Vgl. Generalnenner in § 11.)

Ist a der Dividendus, t der Divisor, q der ganzzahlige Quotient, r der Rest bei einem Divisionsexempel, so ist:

$$\frac{a}{t} = q + \frac{r}{t} \quad \text{oder} \quad a = qt + r.$$

Diese Gleichung, durch m dividiert, ergibt:

$$\frac{a}{m} = q \cdot \frac{t}{m} + \frac{r}{m}.$$

Sind also $\frac{t}{m}$ und $\frac{r}{m}$ ganze Zahlen, so ist auch $\frac{a}{m}$ ganzzahlig. Sind zweitens $\frac{t}{m}$ und $\frac{a}{m}$ ganze Zahlen, so ist auch $\frac{r}{m}$ ganzzahlig. Daher gelten die beiden Sätze:

1. *Wenn bei einer Division Divisor und Rest durch eine und dieselbe Zahl teilbar sind, so teilt diese Zahl auch den Dividendus.*

2. *Wenn bei einer Division Dividendus und Divisor durch eine und dieselbe Zahl teilbar sind, so teilt diese Zahl auch den Rest.*

Auf diesen Sätzen beruht das im Rechen-Unterrichte gelehrte Verfahren, um den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen zu finden, ohne dieselben in Primfaktoren zu zerlegen. Z. B.:

```
828 | 5635 = 6
      4968
      ----
       667 | 828 = 1
             667
             ---
             161 | 667 = 4
                   644
                   ---
                    23 | 161 = 7
                         161
                         ---
```

Der letzte Divisor 23 ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 828 und 5635. Dieses Verfahren wird namentlich angewandt, um die größte ganze Zahl zu finden, durch die sich ein Bruch mit großem Zähler und Nenner heben läßt.

Fast alle Sprachen besitzen ein mehr oder weniger vollständiges Zahlwort-System, d. h. sie bilden ihre Zahlwörter nach dem Schema:

$$a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 + \ldots,$$

wo a_0, a_1, a_2, a_3 ... die Zahlwörter für alle Zahlen sind, die kleiner als b sind. In den meisten Sprachen ist b gleich zehn, weil der Mensch zehn Finger hat, im Deutschen sagt man für b^2 hundert, für b^3 tausend usw. Die Zahl b heißt Basis des Zahlwort-Systems, ihre Potenzen heißen Stufenzahlen. In manchen Sprachen finden sich außer Zahlwörtern der hauptsächlichsten Basis auch Zahlwörter, die auf eine andere Basis hinweisen, z. B. quatre-vingts = viermal zwanzig = achtzig. Bisweilen ist außer der Addition und Multiplikation auch die Subtraktion zur Bildung der Zahlwörter benutzt, z. B. undeviginti = eins (subtrahiert) von zwanzig = neunzehn.

Alle Kulturvölker älterer und neuerer Zeiten haben außer ihrem Zahlwortsystem auch ein Zahlzeichensystem ausgebildet. Das bequemste Zahlzeichen-System ist das bei allen Kulturvölkern üblich gewordene Zahlzeichen-System, das auf dem Prinzipe des Stellenwertes und der Erfindung eines Zeichens für Null beruht. Dieses System ist von indischen Brahma-Priestern im vierten Jahrhundert nach Chr. G. erfunden, durch die Araber zu den christlichen Völkern gelangt und allmählich am Ausgang des Mittelalters überall

üblich geworden. In dieser Zifferschrift bedeutet z. B. 30478:

$$8 + 7 \cdot b + 4 \cdot b^2 + 0 \cdot b^3 + 3 \cdot b^4, \text{ wo } b \text{ zehn ist.}$$

Durch die Einführung des Zeichens 0 für eine ausfallende Stufenzahl gelingt es, mit denselben zehn Zahlzeichen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

jede noch so große Zahl zu schreiben. Unser Zahlwort-System kennt die Null noch nicht, und hat daher die Angabe der Stufenzahlen zehn, hundert, tausend usw. nötig. Ebenso kennt die Zifferschrift der Römer die Null noch nicht, dieselbe ist rein additiv, d. h. die Römer bezeichneten durch Aneinanderreihung der Zeichen für mehrere Zahlen die Zahl, welche durch Addition dieser Zahlen entsteht, z. B.:

CCCLXVI = hundert + hundert + hundert
+ fünfzig + zehn + fünf + eins.

Nebenbei tritt noch die Subtraktion hinzu, z. B. IX = eins von zehn. Im Mittelalter rechnete das Volk noch überall mit römischen Zahlzeichen. Durch die indisch-arabische Zifferschrift ist alles Rechnen viel bequemer und übersichtlicher geworden.

---

§ 15. Dezimalbrüche.

Wenn man die auf der Basis zehn beruhende Stellenwert-Schrift der natürlichen Zahlen derartig fortsetzt, daß man auf die Vielfachen der Stufenzahlen (§ 14) auch noch Vielfache von

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ \cdots$$

folgen läßt, so erhält man einen Dezimalbruch. Ein Dezimalbruch hat also die Form:

$\ldots a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 + b_1 : 10^1 + b_2 : 10^2 + \ldots$, wo die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ entweder null oder eine der Zahlen von 1 bis 9 sind. Man schreibt einen Dezimalbruch so, daß man die Koeffizienten $\ldots a_2, a_1, a_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ unmittelbar nebeneinander setzt und die den Koeffizienten angehörigen Stufenzahlen dadurch kenntlich macht, daß man hinter a_0 ein Komma setzt. Z. B.:

$$12{,}56 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 5 : 10 + 6 : 100,$$
$$0{,}138 = 1 : 10 + 3 : 100 + 8 : 1000,$$
$$0{,}0056 = 5 : 10^3 + 6 : 10^4.$$

Ist ein Dezimalbruch kleiner als 1, so setzt man 0 vor das Komma. Ist einer der Koeffizienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ null, so muß er auch in der abgekürzten Schreibweise durch eine Null vertreten werden. Eine ganze Zahl kann als Dezimalbruch betrachtet werden, der 0 Zehntel, 0 Hundertstel usw. enthält.

Aus der Definition geht hervor, daß ein Dezimalbruch immer gleich dem Bruche ist, dessen Zähler der ohne Komma geschriebene Dezimalbruch ist, und dessen Nenner 10^m ist, wenn m „Dezimalstellen" auf das Komma folgen, z. B.:

$$15{,}8 = \frac{158}{10}, \quad 1{,}58 = \frac{158}{100}, \quad 0{,}158 = \frac{158}{1000}, \quad 0{,}0158 = \frac{158}{10000}.$$

Da die Dezimalbruch-Schreibweise eine Erweiterung des indischen Ziffersystems bildet, so hat das Rechnen mit Dezimalbrüchen dieselben Vorzüge, wie das Rechnen mit ganzen Zahlen in unserem Ziffersystem. Aus der Erklärung der Dezimalbrüche gehen folgende Regeln für das Rechnen mit solchen Brüchen hervor:

1. Ein Dezimalbruch bleibt, seinem Werte

nach, ungeändert, wenn man rechts beliebig viele Nullen anhängt; denn dies bedeutet nichts weiter als ein Erweitern des Bruches mit einer Potenz von zehn.

2. Ein Dezimalbruch wird mit 10^m multipliziert bzw. dividiert, indem man das Komma um m Stellen nach rechts bzw. links rückt. Nicht vorhandene Stellen werden dabei durch Nullen ausgefüllt. Z. B.:
$5{,}34 \cdot 10 = 53{,}4$; $4{,}7 : 10 = 0{,}47$; $87{,}56 : 10000 = 0{,}008756$.

3. Dezimalbrüche werden addiert oder subtrahiert, indem man immer die Stellen gleicher Stufenzahl addiert oder subtrahiert, und aus den Summen bzw. Differenzen wieder einen Dezimalbruch bildet. Z. B.:

4,753	4,753(0)
0,1846 (add.)	0,1846 (subt.)
4,9376	4,5684

4. Zwei Dezimalbrüche werden multipliziert, indem man die durch Weglassung der Kommata entstehenden Zahlen multipliziert und im Produkte so viele Zahlen von rechts nach links abschneidet, als beide Dezimalbrüche zusammen Stellen haben. Z. B.:

19,34	0,0029
2,15	2,15
9670	145
1934	29
3868	58
41,5810	0,006235

Die Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen ihm **genau** gleichen Dezimalbruch ist nur möglich, wenn der Nenner des Bruches keine anderen Primfaktoren enthält, als 2 und 5. So ist z. B.: $\frac{17}{80} = \frac{17}{2^3 \cdot 10} = \frac{17 \cdot 5^3}{10^3 \cdot 10} = \frac{2125}{10^4} = 0{,}2125$.

Enthält aber der Nenner noch andere Primfaktoren als 2 und 5, so kann durch Erweitern nie ein Bruch entstehen, dessen Nenner eine Potenz von zehn ist. In diesem Falle begnügt man sich damit, für einen solchen Bruch Dezimalbrüche anzugeben, die ihm möglichst nahe kommen. Das Verfahren, solche Dezimalbrüche zu finden, beruht auf einer steten Erweiterung eines Bruches mit zehn, und ist aus folgendem Beispiele ersichtlich:

```
9:14=0,64285··
90
84
 60
 56
  40
  28
  120
  112
    80
```

Also: $0{,}6 < \frac{9}{14} < 0{,}7$; Fehler $< \frac{1}{10}$

$0{,}64 < \frac{9}{14} < 0{,}65$; „ $< \frac{1}{100}$

$0{,}642 < \frac{9}{14} < 0{,}643$ „ $< \frac{1}{1000}$

$0{,}6428 < \frac{9}{14} < 0{,}6429$; „ $< \frac{1}{10000}$

$0{,}64285 < \frac{9}{14} < 0{,}64286$; „ $< \frac{1}{100000}$.

Durch dieses Verfahren kann man also jeden Bruch in zwei Grenzen einschließen, welche Dezimalbrüche sind, die sich nur um $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{100}$ oder $\frac{1}{1000}$ usw. unterscheiden. Auf die Verwandlung eines gewöhnlichen Bruchs in einen ihm nahezu gleichen Dezimalbruch läßt sich auch die Division zweier Dezimalbrüche zurückführen, nämlich:

5. Zwei Dezimalbrüche werden dividiert,

indem man erstens beide durch Anhängen von Nullen auf gleichviel Stellen bringt, zweitens die Kommata fortläßt, drittens die aus dem Dividendus hervorgegangene ganze Zahl zum Zähler, die aus dem Divisor hervorgegangene ganze Zahl zum Nenner eines Bruches macht, viertens diesen Bruch nach dem soeben besprochenen Verfahren in einen Dezimalbruch verwandelt. Z. B.:

$$11{,}637 : 4{,}31 = 11637 : 4310 = 2{,}7\,;$$
$$48{,}6 : 0{,}127 = 48600 : 127 = 382{,}68;$$
$$0{,}0024 : 2{,}498 = 24 : 24680 = 0{,}00097.$$

Oft verfährt man bequemer, wenn man im Dividendus und im Divisor das Komma um so viel Stellen nach rechts rückt, als der Divisor Stellen hat, mit der so aus dem Divisor entstandenen ganzen Zahl in den aus dem Dividendus entstandenen Dezimalbruch wie in eine ganze Zahl dividiert und das Komma setzt, sobald die Einerstelle des Dividendus in den Rest gezogen ist. Ist die letzte Dezimalstelle in den Rest gezogen, so kann man noch durch jedesmalige Verzehnfachung des Restes weitere Stellen im Quotienten erhalten. Z. B.:

$$14{,}246 : 0{,}94 = 1424{,}6 : 94 = 15{,}155 \cdots$$

```
1424,6 : 94 = 15,155 ...
94
--
484
470
---
 146
  94
 ---
  520
  470
  ---
   500
```

Dezimalbrüche nennt man geschlossen oder ungeschlossen, je nachdem ihre Stellenzahl eine beschränkte oder eine unbeschränkte ist. Ungeschlossene Dezimalbrüche liefern alle diejenigen Brüche, deren Nenner noch andere Primfaktoren als 2 und 5 enthalten. Setzt man die Berechnung der Stellen eines solchen ungeschlossenen Dezimalbruchs hinlänglich weit fort, so erscheint eine gewisse Reihe von Ziffern in derselben Aufeinanderfolge unaufhörlich wieder. Dies rührt daher, daß bei der fortgesetzten Division endlich einmal ein Rest erscheinen muß, der schon einmal da war, weil bei einer Division durch eine Zahl N nur N — 1 verschiedene Reste, nämlich 1, 2, 3..., N — 1 möglich sind. Z. B.:

$$\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}\ \overline{285714}\cdots$$

$$\frac{4}{13} = 0{,}\overline{307692}\ \overline{307692}\cdots$$

Eine solche wiederkehrende Zifferreihe heißt Periode und ein Dezimalbruch, in dessen Stellen eine Periode erscheint, periodisch. Bei $\frac{4}{13}$ ist 307692 die Periode. Man schreibt die eine Periode bildenden Stellen meist nur einmal und deutet durch einen darüber gesetzten Strich den Umfang der Periode an. Fängt die Periode sogleich mit der ersten Dezimalstelle an, so heißt der Dezimalbruch rein-periodisch, stehen noch andere Stellen vor der Periode, unrein-periodisch. Diese Stellen selbst heißen dann vorperiodisch. Z. B. $\frac{76}{75} = 1{,}01\overline{3}$ hat zwei vorperiodische Stellen 01 und eine Stelle in der Periode, nämlich 3.

Um einen geschlossenen Dezimalbruch

in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, hat man nur den Bruch zu bilden und eventuell zu heben, dessen Zähler die nach Fortlassung des Kommas entstehende ganze Zahl ist und dessen Nenner eine 1 mit so viel angehängten Nullen ist, als der Dezimalbruch Stellen hatte.

Wie aber rein- und unrein-periodische Dezimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt werden, zeigen die folgenden Beispiele:

Rein-periodisch:

$$x = 0{,}\overline{518}\text{, also:}$$
$$1000\,x = 518{,}\overline{518}\ \text{(subt.)}$$
$$999\,x = 518\text{, also:}$$
$$x = \frac{518}{999} = \frac{14}{27}.$$

Unrein-periodisch:

$$x = 0{,}43\overline{686}\text{, also:}$$
$$100000\,x = 43686{,}\overline{86}$$
$$\text{und}\quad 1000\,x = 436{,}\overline{86}\ \text{(subt.)}$$
$$99000\,x = 43250\text{, also}$$
$$x = \frac{43250}{99000} = \frac{173}{396}.$$

§ 16. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

Schon in § 5 und § 9 sind die Transpositionsregeln erster und zweiter Stufe dazu verwandt, um solche Bestimmungsgleichungen zu lösen, in denen die Unbekannte nur einmal vorkommt. Hier sollen nun auch solche Gleichungen gelöst werden, in denen die Unbekannte an mehreren Stellen vorkommt. Der dann einzuschlagende Weg zur Isolierung der Unbekannten ist aus folgendem Beispiel ersichtlich:

Zu lösen sei: $$\frac{3x-5}{4} = \frac{4-x}{2} + \frac{9-2x}{6}.$$

1. Brüche fortschaffen (durch Multiplikation mit 12):

$$3(3x-5) = 6(4-x) + 2(9-2x).$$

2. Klammern lösen, in denen x vorkommt:

$$9x - 15 = 24 - 6x + 18 - 4x.$$

3. x nach links transponieren:

$$9x + 6x + 4x = 24 + 18 + 15.$$

4. Vereinigen:

$$19x = 57.$$

5. Durch den Koeffizienten von x dividieren:

$$x = \frac{57}{19} = 3.$$

Die Probe geschieht durch Einsetzen, nämlich:

$$\frac{3 \cdot 3 - 5}{4} = 1 \text{ und } \frac{4-3}{2} + \frac{9 - 2 \cdot 3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Bei Gleichungen, die außer der Unbekannten x auch Buchstaben enthalten, die als bekannt gelten sollen, hat man die Vereinigung der x enthaltenden Glieder durch Absondern zu bewerkstelligen, z. B.:

$$p^2x + q(p-q) = (p-q)(3p + 4q) + q^2x,$$
$$p^2x - q^2x = (p-q)(3p + 4q - q),$$
$$x(p^2 - q^2) = (p-q)(3p + 3q),$$
$$x(p+q)(p-q) = 3(p-q)(p+q)$$
$$x = 3.$$

Das Fortschaffen der Brüche kann unterbleiben, wenn kein Nenner die Unbekannte enthält, z. B.:

$$\frac{2(x-2)}{9} - 1 = \frac{x+1}{12},$$
$$\frac{2x-4}{9} - 1 = \frac{x+1}{12},$$
$$\frac{2x}{9} - \frac{4}{9} - 1 = \frac{x}{12} + \frac{1}{12},$$
$$\frac{2x}{9} - \frac{x}{12} = \frac{1}{12} + \frac{4}{9} + 1.$$

$$\frac{5}{36}x = \frac{55}{36},$$
$$x = \frac{55}{36} : \frac{5}{36} = 55 : 5 = \mathbf{11}.$$

Enthält eine Gleichung mehrere Buchstaben, so kann man jeden als unbekannt betrachten und deshalb jeden durch die übrigen ausdrücken, z. B.:

$$2x + \frac{3}{4}y = 4(x - y + z)$$

ergibt

$$x = \frac{19}{8}y - 2z \text{ oder } y = \frac{8}{19}x + \frac{16}{19}z \text{ oder } z = \frac{19}{16}y - \frac{x}{2}.$$

Mit Hilfe der Gesetze der Rechnungsarten erster und zweiter Stufe kann man nur solche Gleichungen lösen, welche sich auf die eingerichtete Form $ax = b$ bringen lassen, wo a und b bekannte Zahlen oder Buchstabenausdrücke sind. Die Lösung von Gleichungen, welche auf andere Formen, z. B. auf $cx^2 + dx = e$ führen, kann erst später besprochen werden (§ 21). Doch können hier schon solche Gleichungen gelöst werden, bei denen Glieder, die x^2, x^3 usw. enthalten, sich fortheben. Z. B.: $6(x-1)(4x+15) = (12x-1)(2x+2)$ ergibt zwar zunächst $24x^2 + 66x - 90 = 24x^2 + 22x - 2$, dann aber $66x - 90 = 22x - 2$ oder $x = \mathbf{2}$.

Wenn in der eingerichteten Form $ax = b$, a und b beide null sind, so ergibt sich $x = \frac{0}{0}$, also eine vieldeutige Quotientenform (§ 9). Damit sagt uns die Algebra, daß x jede beliebige Zahl sein kann, und daß also die vorgelegte Gleichung keine Bestimmungs-

gleichung, sondern eine *identische* Gleichung war. Z. B.:

$$\frac{4}{5}x + 2a = \frac{7(x + 4a) - (8a - x)}{10}$$

ergibt: $8x + 20a = 7x + 28a - 8a + x$

oder: $8x - 7x - x = 28a - 8a - 20a$,

d. h.: $0 \cdot x = 0 \cdot a = 0$, also x jede beliebige Zahl.

In der Tat läßt sich aus der rechten Seite der vorgelegten Gleichung die linke durch Umformung finden, nämlich:

$$\frac{7(x + 4a) - (8a - x)}{10} = \frac{8x + 20a}{10} = \frac{4}{5}x + 2a.$$

Wenn in der eingerichteten Form $ax = b$, *b null, a nicht null* ist, so ergibt sich $x = 0$. Wenn aber *b nicht null, wohl aber a null* ist, so kommt $x = \frac{a}{0} = \infty$ (§ 11 am Schluß). So wird z. B. $3x + 4 = 3x + 5$ durch *keinen endlichen* Wert von x, sondern nur durch $x = \infty$ erfüllt.

Wenn ein gemeinsamer Faktor beider Seiten *die Unbekannte x enthält, so kann man diesen Faktor gleich null setzen*, weil dadurch die *beiden* Seiten der Gleichung null werden, die Gleichung also erfüllt wird. Durch das Nullsetzen des gemeinsamen x enthaltenden Faktors gewinnt man eine Gleichung zur Bestimmung von x. Entsteht durch Fortlassen des gemeinsamen Faktors eine immer noch x enthaltende Gleichung, so kann man auch diese lösen, und erhält dann zwei Werte für x, welche beide die vorgelegte Gleichung befriedigen. Z. B.:

1. $7(x-16)=\frac{1}{5}(x-16)-x+16$ ergibt $7(x-16) = \frac{1}{5}(x-16)-(x-16)$, also $x-16=0$ oder $x=16$;

2. $\frac{x}{2}(x+3)=4x+12$ ergibt $\frac{x}{2}(x+3)=4(x+3)$, also sowohl $x+3=0$, d.h. $x=-3$, wie auch $\frac{x}{2}=4$, d.h. $x=8$.

Eingekleidete Gleichungen sind Aufgaben, welche in Worte gekleidet sind und Fragen enthalten, die durch Auflösung einer Gleichung beantwortet werden können. Die in Worten gemachten Angaben hat man in die arithmetische Sprache so zu übersetzen (Ansatz), daß eine Bestimmungsgleichung entsteht, deren Lösung die Antwort liefert. Hierzu drei Beispiele:

1. Aufgabe: Wenn man das Dreifache einer gewissen Zahl von 100 subtrahiert, so kommt dasselbe heraus, als wenn man ihr Doppeltes um 15 vermehrt. Wie heißt die Zahl?

Auffindung des Ansatzes: Man bezeichnet die gesuchte Zahl mit x und sucht diejenige Stelle des Wortlautes auf, welche arithmetisch durch ein Gleichheitszeichen auszudrücken ist. Es ist dies hier die Stelle „so kommt dasselbe heraus". Hieraus entnimmt man, daß eine Zahl doppelt auszudrücken ist. Dies tut man, den Angaben entsprechend. Man erhält einerseits $100-3x$, andererseits $2x+15$.

Lösung der Gleichung:

$$100-3x=2x+15$$
$$100-15=2x+3x$$
$$85=5x$$
$$x=\frac{85}{5}=17.$$

6*

Beantwortung der Frage: Die Zahl heißt 17.

Probe: Es kommt beide Male die Zahl 49.

2. Aufgabe: Zwei Nachbarn kaufen gleichzeitig Kaffee, der eine 25 Kilo, der andere 24 Kilo, der erste braucht täglich 140 Gramm, der andere nur 120 Gramm. Nach wieviel Tagen sind ihre Vorräte gleich und wieviel Gramm hat dann jeder?

Auffindung des Ansatzes: Nach x Tagen hat der erste noch $25000 - 140x$ Gramm, der zweite $24000 - 120x$ Gramm. Beides soll gleich sein.

Lösung der Gleichung:

$$25000 - 140x = 24000 - 120x$$
$$1000 = 20x$$
$$50 = x.$$

Beantwortung der Frage: Nach 50 Tagen sind ihre Vorräte gleich. Dann hat der erste noch $(25000 - 140 \cdot 50)$ Gramm oder 18 Kilo, der zweite noch $(24000 - 120 \cdot 50)$ Gramm oder auch 18 Kilo.

3. Aufgabe: Von den Endpunkten eines 600 m langen Weges gehen zwei Fußgänger A und B gleichzeitig ab, um sich zu begegnen. Sie treffen sich nach 4 Minuten. B legt in jeder Minute 2 m mehr zurück als A. Wieviel m legt A in einer Minute zurück?

Auffindung des Ansatzes: A legt in 1 Minute x m zurück, B also $(x + 2)$ m. Nach 4 Minuten ist A $4x$ m, B $4(x + 2)$ m gewandert. Die Summe beider Wege soll 600 m lang sein. Also ist $4x + 4(x + 2) = 600$.

Lösung der Gleichung:

$4x + 4(x + 2) = 600$ ergibt $8x = 592$ oder $x = 74$.

Beantwortung der Frage: A legt 74 m in der Minute zurück.

Probe: Weg des A: $4 \cdot 74$ m oder 296 m, Weg des B: $4 \cdot 76$ m oder 304 m. Summe beider 600 m.

Bei der Auffindung des Ansatzes ist namentlich folgendes zu beachten:

1. Man suche zuerst nicht allein danach, welche Größe man passenderweise als Unbekannte wählt, sondern auch danach, welche Größe sich doppelt ausdrücken läßt. Dies ist selten die Unbekannte selbst.

2. Scheinen mehrere Größen unbekannt zu sein, so betrachte man doch nur eine als die Unbekannte der aufzustellenden Gleichung. Es muß dann gelingen, die anderen Größen durch die gewählte Unbekannte auszudrücken.

3. Häufig tut man besser, nicht die Größe, nach welcher gefragt ist, als Unbekannte anzusehen, sondern eine andere Größe, durch welche die gefragte Größe ausgedrückt werden kann.

4. Enthält eine Angabe zwei verschieden benannte Größen, so reduziere man immer, wie beim Regeldetri-Ansatz, auf die Einheit, was immer auf doppelte Weise geschehen kann. Z. B.: a) Aus der Angabe, er macht in 45 Minuten $4\frac{1}{4}$ Kilometer, folgt zweierlei, erstens in 1 Minute $(4\frac{1}{4} : 45)$ Kilometer, zweitens 1 Kilometer in $(45 : 4\frac{1}{4})$ Minuten; b) 1 Kilo kostet 16 Mark ergibt auch, daß man für 1 Mark $\frac{1}{16}$ Kilo erhält; c) 11 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit 12 Tage heißt, daß 1 Arbeiter 132 Tage brauchen würde, oder, daß zur Fertigstellung in einem Tage 132 Arbeiter erforderlich wären.

---

§ 17. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Enthält eine Gleichung zwei Unbekannte x und y, so kann man immer die eine Unbekannte, etwa x, durch die andere Unbekannte y ausdrücken. Setzt man dann für y eine beliebige Zahl ein, so muß sich für x immer ein zugehöriger Wert ergeben, so daß unzählig viele Wertepaare von x und y die Gleichung befriedigen. So wird z. B. $9x - 5y = 1$ erfüllt für $x = 1$, $y = \frac{8}{5}$;

$$x = \frac{2}{3},\ y = 1;\quad x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{4};\quad \text{usw.}$$

Wenn aber zu einer Gleichung zwischen x und y noch eine zweite derartige Gleichung hinzutritt, so entsteht die Aufgabe, diejenigen Wertepaare herauszufinden, welche das entstehende Gleichungssystem befriedigen, d. h. deren Einsetzung sowohl die erste wie auch die zweite Gleichung zu einer identischen macht. Diese Aufgabe löst man dadurch, daß man eine neue Gleichung bildet, welche die eine Unbekannte gar nicht mehr enthält. Letztere nennt man dann **eliminiert**. Die Auflösung der nur eine Unbekannte enthaltenden neuen Gleichung (§ 16) liefert den Wert der einen Unbekannten. Die Einsetzung dieses Wertes in irgend eine der beiden vorliegenden Gleichungen führt dann (§ 16) zum Werte der anderen Unbekannten.

Für die Elimination einer Unbekannten aus einem System zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten sind drei Methoden üblich, nämlich:

1. Gleichsetzungsmethode. Man drückt, um x zu eliminieren, x durch y vermittels beider Gleichungen

aus und setzt die beiden nur y enthaltenden Ausdrücke einander gleich. Z. B.:

$$\left\{\begin{array}{l} 14x - 4y = 1 \\ \frac{6x-1}{5} = 2x - \frac{y}{4} \end{array}\right\} \text{ führt zu } \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1+4y}{14} \\ x = \frac{5y-4}{16} \end{array}\right\} \text{ daher:}$$

$\frac{1+4y}{14} = \frac{5y-4}{16}$, woraus $y = 12$ folgt. Setzt man $y = 12$ ein, so erhält man auf zweifache Weise $x = 3\frac{1}{2}$.

2. Einsetzungsmethode. Den aus der einen Gleichung erhaltenen Ausdruck, der die eine Unbekannte durch die andere ausdrückt, setzt man in der anderen Gleichung überall ein, wo diese eine Unbekannte vorkommt. Z. B.:

$$\left\{\begin{array}{l} 8x - 2y = 3y + 6 \\ 6y + 4x - 100 = 49 - 4y - 3x \end{array}\right\} \text{ gibt: } x = \frac{5y+6}{8},$$

also durch Einsetzung:

$$6y + \frac{4(5y+6)}{8} - 100 = 49 - 4y - \frac{3(5y+6)}{8},$$

woraus $y = 10$ folgt, also $x = 7$.

3. Methode der gleichgemachten Koeffizienten. Man bringt die Gleichungen beide auf die geordnete Form, d. h. auf die Form $ax + by = c$, wo a, b, c ganze Zahlen sind, die auch negativ sein können. Dann multipliziert man, um x zu eliminieren, beide Gleichungen derartig mit möglichst kleinen ganzen Zahlen, daß die Koeffizienten von x in den beiden entstandenen Gleichungen gleich werden oder sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Im letzteren Falle ergibt die Addition, im ersteren die Subtraktion eine von x freie Gleichung. Beide Fälle kommen auf das-

selbe hinaus, weil die Subtraktion als Addition mit umgekehrten Vorzeichen angesehen werden kann. Z. B.:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{9}{5}(x+4)-y=8\frac{1}{2}\\ 4(4y-1)=3x+2y\end{array}\right\} \text{ gibt in geordnet. Form: } \left\{\begin{array}{l}18x-10y=13\\ -3x+14y=4\end{array}\right\}$$

Man hat, um die Koeffizienten von x gleich zu machen, die erste unverändert zu lassen, die zweite mit 6 zu multiplizieren. So kommt $\left\{\begin{array}{l}18x-10y=13\\ -18x+84y=24\end{array}\right\}$, woraus durch Addition $74y=37$, d. h. $y=\frac{1}{2}$ folgt. Schließlich findet man durch Einsetzung von $y=\frac{1}{2}$ aus irgend einer der beiden gegebenen Gleichungen, daß $x=1$ ist. Um ebenso y zu eliminieren, müßte man die erste Gleichung mit 7, die zweite mit 5 multiplizieren. Dann hätte man: $\left\{\begin{array}{l}126x-70y=91\\ -15x+70y=20\end{array}\right\}$, daraus $111x=111$, also $x=1$ erhalten.

Der Koeffizient, welcher bei der zu eliminierenden Unbekannten erzielt werden muß, ist immer das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (§ 14) der vorliegenden Koeffizienten der beiden Unbekannten.

Wie man sich bei der Auflösung eines Systems von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bisweilen die Rechnung erleichtern kann, zeigen folgende drei Beispiele:

1. $\left\{\begin{array}{l}45x-105y=30\\ 2x+y=7\end{array}\right\}$. Man dividiere die erste Gleichung zunächst durch 15, und eliminiere erst dann. So kommt $x=3$, $y=1$.

2. Um $\left\{\begin{array}{l} 105x - 862y = -1083 \\ 102x - 864y = -1092 \end{array}\right\}$ zu lösen, bilde man durch Subtraktion eine dritte einfachere Gleichung $3x + 2y = 9$, die man mit einer der beiden gegebenen Gleichungen zu verbinden hat. Es kommt $x = 2$, $y = 1\frac{1}{2}$.

3. Um $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{3}{y+1} = \frac{5}{4} \\ \frac{4}{x} - \frac{7}{y+1} = \frac{1}{4} \end{array}\right\}$ zu lösen, betrachtet man $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y+1}$ als Unbekannte, dann erhält man $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{y+1} = \frac{1}{4}$, also $x = 2$, $y = 3$.

Um drei Unbekannte x, y, z aus drei Gleichungen I, II, III zu bestimmen, eliminiert man zunächst eine und dieselbe Unbekannte, z. B. x aus zwei Paaren der gegebenen Gleichungen, z. B. sowohl aus I und II, wie auch aus I und III. Dadurch erhält man zwei Gleichungen, welche nur noch y und z enthalten, und aus denen man nach den obigen Methoden y und z berechnen kann. x ergibt sich dann durch Einsetzung. Analog verfährt man bei vier Gleichungen mit vier Unbekannten und überhaupt bei n Gleichungen mit n Unbekannten. Z.B.:

Um $\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & 16x + y - 13z = -56 \\ \text{II.} & 6x - 4y + 12z = 84 \\ \text{III.} & 2x + 2y - z = 3 \end{array}\right\}$ zu berechnen, eliminiere man etwa y aus I. und II. wie auch aus I. und III. Dadurch erhält man:

$\left\{\begin{array}{l} 70x - 40z = -140 \\ 30x - 25z = -115 \end{array}\right\}$, woraus sich $\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ z = 7 \end{array}\right\}$ ergibt.

Setzt man diese Werte in I. ein, so erhält man $y = 3$. Das eben angegebene Mittel der *allmählichen Elimination* führt bisweilen nicht so schnell zum Ziel, wie andere Mittel. Ist z. B.:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 19 \\ y + z = 21 \\ z + x = 24 \end{array}\right\}$$

aufzulösen, so addiere man alle drei Gleichungen und dividiere durch 2. Dadurch erhält man:

$$x + y + z = 32 .$$

Subtrahiert man nun von dieser Gleichung nacheinander jede der gegebenen, so erhält man nacheinander $z = 13$, $x = 11$, $y = 8$.

Damit aus einem Gleichungssysteme bestimmte Werte der Unbekannten hervorgehen, ist es notwendig, daß die Gleichungen des Systems voneinander *unabhängig* sind, d. h. nicht durch bloße Umformungen auseinander hervorgehen können. Bei mehr als zwei Gleichungen ist es oft schwer, zu erkennen, daß dieselben voneinander abhängen. Immer aber wird dies *durch die Elimination aufgedeckt*. Z. B.:

Das System

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 3z = 20 \\ x + 3y + 11z = 55 \\ 8x + 3y + 31z = 170 \end{array}\right\}$$

führt durch Elimination zweier Unbekannten auf eine identische Gleichung, enthält also Gleichungen, die voneinander abhängen. In der Tat ergibt die Summe des Dreifachen der ersten Gleichung und des Doppelten der zweiten Gleichung die dritte Gleichung.

Führt die Elimination auf eine für endliche Werte der Unbekannten unmögliche Gleichung, so verrät dies, daß die gegebenen Gleichungen einen *Widerspruch* enthalten, wenn man nur endliche Werte der Unbe-

kannten zuläßt. So ist z. B. $\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 6x + 4\frac{1}{2}y = 19 \end{cases}$ ein System von sich widersprechenden Gleichungen.

Bei *eingekleideten* Gleichungen mit mehreren Unbekannten lese man aus den gemachten Angaben so viel Gleichungen heraus, als man Unbekannte einführt. Oft wird die Bildung des Gleichungssystems dadurch erleichtert, daß man nicht allein für die Größen, nach denen gefragt ist, sondern auch für andere in der Aufgabe erwähnte Größen Buchstaben als Unbekannte einführt. Z. B.:

Aufgabe: Ein Engländer kaufte bei einem Wechsler in Basel Zwanzigfrank- und Zwanzigmark-Stücke. Er erhielt zusammen 54 Goldstücke im Werte von tausend Mark. Wieviel Mark deutsches Geld empfing er, wenn 20 Franks = 16 Mark sind?

Lösung: x Zwanzigfrank-Stücke sind 20x Franks, y Zwanzigmark-Stücke sind 20 y Mark, 1 Frank = $\frac{4}{5}$ Mark. Daher ist $20x \cdot \frac{4}{5} + 20y = 1000$ die eine Gleichung. Ferner soll $x + y = 54$ sein. Aus beiden Gleichungen ergibt sich das Wertepaar $\begin{cases} x = 20 \\ y = 34 \end{cases}$. Er empfing also $20 \cdot 34$ M. = **680 Mark** in deutschem Gelde.

V. Abschnitt.

Quadratisches.

§18. Quadrieren und Quadratwurzel-Ausziehung.

I. $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$;

II. $(a : b)^2 = a^2 : b^2$;

III. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

IV. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

V. $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$;

VI. $(\sqrt{q})^2 = q$ (Erklärende Formel d. Quadratwurzel);

VII. $\sqrt{q^2} = q$;

VIII. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

IX. $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$.

Quadrieren heißt „mit sich selbst multiplizieren“. Das Ergebnis nennt man „Quadrat“. [Der Name stammt aus der Geometrie, wo gelehrt wird, daß man den Inhalt eines „Quadrats“ findet, indem man die Maßzahl seiner Seite mit sich selbst multipliziert und dem Produkte die entsprechende Flächeneinheit als Benennung gibt, also z. B. Meterquadrate oder Quadratmeter sagt, wenn die Längeneinheit das Meter war.] Z. B.: Das Quadrat

von 14 ist 196, von $\frac{3}{8}$ ist $\frac{9}{64}$, von $1\frac{1}{3}$ ist $1\frac{7}{9}$.

Das Quadrieren kann auch als ein Potenzieren mi. dem Exponenten 2 aufgefaßt werden (§ 23), z. B.:

$$14^2 = 196, \quad \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}, \quad \left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1\frac{7}{9}.$$

Die Formeln I. und II. folgen unmittelbar aus den Gesetzen der Multiplikation, nämlich:

$(a \cdot b)^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = a^2 \cdot b^2,$
$(a : b)^2 = (a : b) \cdot (a : b) = (a \cdot a) : (b \cdot b) = a^2 : b^2.$

Die Formeln III. und IV., die schon in § 12 abgeleitet sind, lauten in Worten:

III. *Eine Summe wird quadriert, indem man zur Summe der Quadrate ihrer Summanden das* **doppelte Produkt derselben addiert.**

IV. *Eine Differenz wird quadriert, indem man Minuendus und Subtrahendus quadriert und von der Summe der erhaltenen Quadrate das* **doppelte Produkt aus dem Minuendus und Subtrahendus subtrahiert.**

Ferner folgt aus den Gesetzen der Multiplikation die allgemeine Regel:

Eine mehrgliedrige Summe wird quadriert, indem man eine Summe aus den Quadraten aller Glieder und **aus allen möglichen doppelten Produkten je zweier Glieder bildet,** *und zwar so, daß jedes Quadrat positiv wird, jedes doppelte Produkt aber positiv oder negativ wird, je nachdem die Glieder, aus denen es hervorgeht, gleiche oder ungleiche Vorzeichen hatten.* Z. B.:

1. $(a + b - c - d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd + 2cd;$
2. $(3a - 4b + c)^2 = 9a^2 + 16b^2 + c^2 - 24ab + 6ac - 8bc.$

Wenn man in $a^2 = q$ nicht wie beim Quadrieren a als gegeben und q als gesucht, sondern umgekehrt q als gegeben und a als gesucht betrachtet, so entsteht die zur Quadrierung *umgekehrte* Operation, welche man *Quadratwurzel-Ausziehung* oder auch wohl nur *Wurzelausziehung* oder *Radizierung*

nennt. Man versteht also unter „Quadratwurzel aus q“, geschrieben:

$$\sqrt{q},$$

die Zahl, welche, mit sich selbst multipliziert, q ergibt. In der Formelsprache gibt dies

$$(\sqrt{q})^2 = q \quad \text{(Formel VI.)}.$$

Ebenso folgt aus der Erklärung der Wurzel-Ausziehung die Formel VII. Denn $\sqrt{q^2}$ bedeutet die Zahl, die, mit sich selbst multipliziert, q^2 ergibt, und dies ist q. Beide Formeln geben vereint den Satz:

Quadrierung und Quadratwurzel-Ausziehung heben sich auf. Die Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen wird, heißt *Radikandus.* Z. B.: In $\sqrt{36} = 6$ ist 36 der Radikand, 6 die Wurzel. Das Zeichen $\sqrt{\ }$ ist entstanden aus dem kleinen lateinischen r, dem Anfangsbuchstaben des Wortes radix (= Wurzel). Die Formeln VIII. und IX. ergeben sich aus den entsprechenden Formeln I. und II. für das Quadrieren. Nämlich:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \text{ weil } (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b,$$
$$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}, \text{ weil } (\sqrt{a} : \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 : \sqrt{(b)}^2 = a : b.$$

Ferner beachte man:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b, \text{ weil } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b, \text{ weil } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Daß $\sqrt{a+b}$ **nicht** gleich $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ist, erkennt man daraus, daß $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$ ist, also um $2\sqrt{ab}$ größer ist als $a + b$.

Die Quadrate der natürlichen Zahlen heißen *Quadratzahlen.* Die ersten 20 Quadratzahlen enthält die folgende Tabelle:

$1^2 = 1$	$6^2 = 36$	$11^2 = 121$	$16^2 = 256$
$2^2 = 4$	$7^2 = 49$	$12^2 = 144$	$17^2 = 289$
$3^2 = 9$	$8^2 = 64$	$13^2 = 169$	$18^2 = 324$
$4^2 = 16$	$9^2 = 81$	$14^2 = 196$	$19^2 = 361$
$5^2 = 25$	$10^2 = 100$	$15^2 = 225$	$20^2 = 400$

Da $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$, so ist jedes Quadrat entweder eine Quadratzahl oder der Quotient zweier Quadratzahlen. Deshalb hat $\sqrt{q}$ vorläufig nur Sinn, wenn q eine Quadratzahl oder der Quotient zweier Quadratzahlen oder endlich ein Quotient ist, der sich durch Heben in den Quotienten zweier Quadratzahlen verwandeln läßt. Ist dies aber alles nicht der Fall, so ist $\sqrt{q}$ eine sinnlose Wurzelform, der in § 19 und in § 20 Sinn erteilt werden wird.

Daraus, daß 10^2 die erste dreiziffrige, 10^4 die erste fünfziffrige Zahl usw. darstellt, ergibt sich, daß *das Quadrat einer natürlichen Zahl entweder doppelt so viel Ziffern hat, als diese, oder nur eine Ziffer weniger.* Umgekehrt ist also die Quadratwurzel aus einer

1 ziffrigen oder 2 ziffrigen Zahl: 1 ziffrig,
3 ziffrigen oder 4 ziffrigen Zahl: 2 ziffrig,
5 ziffrigen oder 6 ziffrigen Zahl: 3 ziffrig, usw.

Zum Quadrieren einer zweiziffrigen Zahl kann Formel III., einer dreiziffrigen Zahl Formel V. benutzt werden. Die Formel V. ergibt sich aus III. in folgender Weise:

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2$$
$$= a^2 + 2\,a\,b + b^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2.$$

Ebenso ergibt sich:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 + 2(a + b)\,c + c^2$$
$$+ 2\,(a + b + c)\,d + d^2.$$

Wie mit Hilfe dieser Formeln eine mehrziffrige Zahl quadriert werden kann, zeigt folgendes Beispiel:

Ausführlich:		Abgekürzt:
$364^2 = (a+b+c)^2$, wo	$a = 300$	364^2
$a^2 = 90000$	$b = 60$	9
$2ab = 36000$	$c = 4$	36
$b^2 = 3600$	ist;	= 36
$2(a+b)c = 2880$		288
$c^2 = 16$		16
132496		132496

Durch Umkehrung des soeben besprochenen Verfahrens entsteht das Verfahren der Quadratwurzel-Ausziehung aus dekadisch geschriebenen Zahlen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Ausführlich:		Abgekürzt:
$\sqrt{132496} = a+b+c$, wo		$\sqrt{13'24'96} = 364$
$90000 = a^2$	$a = 300$	9
42496	$b = 60$	42'4
$2a = 600)$ $36000 = 2ab$	$c = 4$	6) 36
6496	ist	36
$3600 = b^2$		396
2896		289'6
$2(a+b) = 720)$ $2880 = 2(a+b)c$		72) 288
16		16
$16 = c^2$		2896

Noch kürzer, da $2ab + b^2 = (2a+b)b$ ist:

$\sqrt{13'24'96} = 364$
9
42'4
66) 396
289'6
724) 2896

Nach derselben Methode findet man auch zu jeder beliebigen natürlichen Zahl die Quadratwurzel aus der nächstkleineren Quadratzahl. Z. B.:

$$(a+b+c)^2 < 13'25'27 < [a+b+(c+1)]^2, \quad \text{wo}$$

```
       9                a = 300
     ---                b =  60
     425                c =   4
66)  396                  ist.
     ----
     2927
724) 2896
Rest:  31
```

Also ist:

$$364^2 < 132\,527 < 365^2,$$

demnach auch:

$$(36{,}4)^2 < 1325{,}27 < (36{,}5)^2$$
$$(3{,}64)^2 < 13{,}2527 < (3{,}65)^2$$
$$(0{,}364)^2 < 0{,}132\,527 < (0{,}365)^2.$$

Hieraus folgt der Satz:

Jede ganze oder gebrochene Zahl, **die kein Quadrat ist,** läßt sich in zwei Grenzen einschließen, die Quadrate von zwei gebrochenen Zahlen sind, die sich nur um $\frac{1}{10}$, um $\frac{1}{100}$, um $\frac{1}{1000}$ oder überhaupt um einen beliebig kleinen Bruch unterscheiden. Soll dieser Bruch z. B. $\frac{1}{2000}$ und 2 die gegebene Zahl sein, so ist, wenn x die kleinere der beiden Grenzen bedeutet, anzusetzen:

$$x^2 < 2 < \left(x + \frac{1}{2000}\right)^2,$$

woraus folgt:

$$(2000\,x)^2 < 8\,000\,000 < (2000\,x + 1)^2.$$

Man hat also die Wurzel aus der nächstkleineren Quadratzahl unter 8 000 000 aufzusuchen und durch

2000 zu dividieren. Das Ergebnis ist dann die untere Grenze. Es ergibt sich:

$$2000\,x = 2828, \quad \text{also } x = \frac{2828}{2000}.$$

Daher:

$$\left(\frac{2828}{2000}\right)^2 < 2 < \left(\frac{2829}{2000}\right)^2.$$

So ist die Zahl 2 in zwei Grenzen eingeschlossen, die Quadrate von Zahlen sind, die sich nur um $\frac{1}{2000}$ unterscheiden.

Das Quadrieren und Radizieren von entwickelten Buchstaben-Ausdrücken zeigen folgende Beispiele:

1. $$(6\,p + 4\,q - r)^2$$
$$= 36\,p^2 + 48\,p\,q + 16\,q^2 - 2\,(6\,p + 4\,q)\,r + r^2$$
$$= 36\,p^2 + 48\,p\,q + 16\,q^2 - 12\,p\,r - 8\,q\,r + r^2,$$

also umgekehrt:

$$\sqrt{36p^2 + 48pq + 16q^2 - 12pr - 8qr + r^2} = 6\,p + 4\,q - r.$$

$$\begin{array}{rl}
& 36p^2 \\ \hline
& 48pq + 16q^2 \\
12\,p) & \underline{48pq + 16q^2} \\ \hline
& -12pr - 8qr + r^2 \\
12\,p + 8\,q) & \overline{-12pr - 8pr + r^2};
\end{array}$$

2. $$\left(8\,x^3 + 8\,x^2 - 10\,x + \frac{1}{2}\right)^2$$
$$= 64\,x^6 + 128\,x^5 + 64\,x^4 - 2\,(8\,x^3 + 8\,x^2)\,10\,x$$
$$+ 100\,x^2 + 2\,(8\,x^3 + 8\,x^2 - 10\,x) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$
$$= 64x^6 + 128x^5 - 96\,x^4 - 152\,x^3 + 108\,x^2 - 10\,x + \frac{1}{4},$$

also umgekehrt:

$$\sqrt{64x^6+128x^5-96x^4-152x^3+108x^2-10x+\frac{1}{4}}$$
$$=8x^3+8x^2-10x+\frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{rl}
 & 64x^6 \\
16x^3) & +128x^5-96x^4 \\
 & +128x^5+64x^4 \\
 & -160x^4-152x^3+108x^2 \\
16x^3+16x^2) & -160x^4-160x^3+100x^2 \\
 & +8x^3+8x^2-10x+\frac{1}{4} \\
16x^3+16x^2-20x) & +8x^3+8x^2-10x+\frac{1}{4}
\end{array}$$

Das Radizieren von Produkten und Quotienten geschieht zwar im allgemeinen nach den Formeln VIII. und IX., z. B.:

$$\sqrt{1024\cdot 1225}=\sqrt{1024}\cdot\sqrt{1225}=32\cdot 35=1120,$$
$$\sqrt{1024:1225}=\sqrt{1024}:\sqrt{1225}=32:35=\frac{32}{35}.$$

Häufig kann man sich jedoch das Radizieren dadurch wesentlich vereinfachen, daß man in Faktoren zerlegt und die gleichen Faktoren zu Quadraten zusammenfaßt, z. B.: $\sqrt{32400}=\sqrt{4\cdot 81\cdot 100}=2\cdot 9\cdot 10=180$, $\sqrt{2025}=\sqrt{25\cdot 81}=5\cdot 9=45$.

Ein Dezimalbruch kann nur dann ein Quadrat sein, wenn er eine gerade Anzahl von Dezimalstellen hat, weil der Nenner das Quadrat einer Potenz von zehn sein muß. Ein solcher Dezimalbruch wird also radiziert, indem man ihn, abgesehen vom Komma, radiziert, und im Ergebnis von rechts nach links halb so viel Stellen

abschneidet, wie der gegebene Dezimalbruch Stellen hatte. Z. B.: $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$; $\sqrt{0{,}1024} = 0{,}32$; $\sqrt{0{,}000144} = 0{,}012$.

Da das Produkt $+9$ nicht nur aus $+3$ mal $+3$, sondern auch aus -3 mal -3 entsteht, so gibt es **zwei** Zahlen, deren Quadrate beide die Zahl $+9$ ergeben. Deshalb ist die Quadratwurzel aus $+9$ sowohl $+3$ als auch -3. Ebenso folgt aus:

$x \cdot x = 16$ sowohl $x = +4$, als auch $x = -4$;

$x \cdot x = \frac{16}{9}$ sowohl $x = +\frac{4}{3}$, als auch $x = -\frac{4}{3}$;

$x \cdot x = a^2 - 2ab + b^2$ sowohl $x = a - b$, als auch $x = b - a$.

Man darf daher aus $x^2 = a^2$ nicht ohne weiteres $x = a$ schließen, sondern muß schließen, daß x entweder gleich $+a$ oder gleich $-a$ ist.

Um die beiden Werte, welche bei einer Quadratwurzel-Ausziehung entstehen, recht deutlich hervortreten zu lassen, setzt man vor das Wurzelzeichen das Doppelzeichen $\pm$ (gelesen: „plus oder minus"), so daß das Wurzelzeichen an sich immer nur den positiven Wert bedeutet. Z. B.:

Aus $x^2 = 324$ folgt $x = \pm\sqrt{324} = \pm 18$;

$12 \pm \sqrt{121} = 12 \pm 11$, also entweder 23 oder **1**;

aber $12 + \sqrt{121}$ soll nur $12 + 11$, also 23 bedeuten.

Da die Quadratwurzel-Ausziehung immer zwei Werte liefert, so nennt man diese Rechenart doppeldeutig. Im Gegensatz hierzu bezeichnet man die im II. und III. Abschnitt behandelten Rechnungsarten als eindeutig. Es gibt nämlich immer nur eine einzige Zahl, welche gleich $a + b$, gleich $a - b$, gleich $a \cdot b$, gleich $a : b$ ist. (Ausgenommen sind die in § 11 bespro-

chenen vieldeutigen Zeichen $0:0$, $0\cdot\infty$, $\infty:\infty$, $\infty-\infty$.) Aus dieser Eindeutigkeit entsprangen die Sätze, welche aussprachen, daß Gleiches mit Gleichem, durch Addition, Subtraktion usw. verknüpft, wiederum Gleiches liefern muß. Da die Quadratwurzel-Ausziehung aber doppeldeutig ist, so muß der jenen Sätzen hier entsprechende Satz folgendermaßen lauten:

Die Quadratwurzel-Ausziehung zweier gleicher Zahlen liefert entweder zwei gleiche Zahlen oder zwei Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Dadurch, daß man bei der Quadratwurzel-Ausziehung zweier gleicher Zahlen auf gleiche Ergebnisse schließt, beruhen Trugschlüsse, wie der folgende sogenannte Beweis, daß $11=5$ ist, zeigt:

Es ist $11+5=2\cdot 8$, also auch, wenn man mit $11-5$ beiderseits multipliziert, $11^2-5^2=2\cdot 8\cdot 11-2\cdot 8\cdot 5$, woraus folgt:

$$11^2-2\cdot 8\cdot 11=5^2-2\cdot 8\cdot 5$$

oder, nachdem 8^2 beiderseits addiert ist,

$$11^2-2\cdot 11\cdot 8+8^2=5^2-2\cdot 5\cdot 8+8^2.$$

Nun steht links das Quadrat von $11-8$, rechts das von $5-8$. Also ist $11-8=5-8$ oder, indem 8 beiderseits addiert wird, $11=5$.

Da aus keiner der bisher definierten Zahlen durch Quadrieren eine negative Zahl entstehen kann, so muß die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl zunächst als sinnlos gelten. Doch wird § 20 solchen Quadratwurzel-Formen Sinn erteilen.

---

§ 19. Irrationale Zahlen.

$(\sqrt{a})^2 = a$, wo a positiv, aber kein Quadrat ist.

Auch wenn a kein Quadrat ist, soll $\sqrt{a}$ eine Wurzelform sein, deren Quadrat genau gleich a ist. Indem derartige Wurzelformen auch als Zahlen betrachtet werden, wird der Zahlbegriff von neuem erweitert. (Vgl. § 7 und § 11.) Z. B.: $\sqrt{7}$ ist die Zahl, deren Quadrat 7 ist. Wiederholt man bei der neu gewonnenen Zahlform die Erörterungen, die in § 7 zu den negativen, in § 11 zu den gebrochenen Zahlen führten, so erhalten dadurch auch $-\sqrt{a}$ und $\frac{1}{\sqrt{a}}$ Sinn, nämlich $-\sqrt{a}+\sqrt{a}=0$ und $\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}=1$. Da die in § 18 besprochenen Gesetze einzig auf der erklärenden Formel $(\sqrt{a})^2=a$ beruhen, so gelten diese Gesetze auch für die neuen Zahlformen, z. B.: $\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{7\cdot 5}=\sqrt{35}$, $\sqrt{700}=\sqrt{7\cdot 100}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{7}=10\sqrt{7}$.

Nach der Erklärung ist $\sqrt{19}$ die positive Wurzel der Gleichung $x^2=19$. Setzt man in diese Gleichung $x=4$, so ergibt sich Kleineres, setzt man $x=5$, so ergibt sich Größeres. Deshalb überträgt man die Begriffe „größer“ und „kleiner“ auch auf die neue Zahlform, und sagt, daß $\sqrt{19}$ zwischen 4 und 5 liegt, obgleich man eigentlich nur meint, daß $4^2<19<5^2$ ist.

In § 18 wurde gezeigt, wie jede positive, ganze oder gebrochene Zahl, die kein Quadrat ist, in zwei Grenzen eingeschlossen werden kann, welche Quadrate von Zahlen sind, die sich nur um einen beliebig kleinen Bruch unterscheiden. Folglich lassen sich für die Quadratwurzel aus einer Zahl, die kein Quadrat

ist, die Grenzen beliebig nahe bringen. Soll z. B. bei $\sqrt{10}$ der Unterschied der Grenzen $\frac{1}{1000}$ betragen, so sucht man nach § 18 die Zahl x, welche die Bedingung $x^2 < 10 < (x + \frac{1}{1000})^2$ erfüllt, findet $x = 3,162$ und daraus:

$$3,162 < \sqrt{10} < 3,163$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

Die Quadratwurzel aus einer Zahl, die kein Quadrat ist, läßt sich zwar **nicht gleich** einer gebrochenen Zahl setzen, wohl aber in **zwei Grenzen** einschließen, die gebrochene Zahlen sind, und deren Unterschied **beliebig klein** gemacht werden kann.

Zahlformen, welche die eben genannte Eigenschaft besitzen, heißen **irrationale** Zahlen, zum Unterschied von den ganzen und gebrochenen Zahlen, die man rational nennt. Den Charakter der irrationalen Zahlen haben nicht nur die hier gewonnenen Quadratwurzelformen, sondern auch noch manche andere Zahlformen (vgl. § 24 u. § 26). Auch die Zahl, welche für jeden Kreis angibt, wievielmal so lang seine Peripherie ist als sein Durchmesser, ist irrational, ohne gleich der Quadratwurzel aus einer ganzen oder gebrochenen Zahl zu sein.

Eine irrationale Wurzel kann sowohl nach der Art ihrer Entstehung, z. B. $\sqrt{5}$, als auch numerisch angegeben, d. h. gleich einer ihr nahen rationalen Grenze gesetzt werden, z. B. $\sqrt{5} = 2,23607$.

Der in § 7 eingeführte Begriff der negativen Zahl ist schon oben auf irrationale Zahlen übertragen. Sind solche negativ, so lassen sie sich in negative rationale Grenzen einschließen. So folgt aus $x^2 = 8$ sowohl $x = +\sqrt{8} = +2,828$ als auch $x = -\sqrt{8} = -2,828$.

Durch Anwendung der Rechnungsarten erster und zweiter Stufe, sowie der Quadratwurzel-Ausziehung auf irrationale Zahlen gelangt man immer wieder zu irrationalen Zahlen, falls die Radikanden der Quadratwurzeln nie negativ sind, z. B.: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$; $\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0{,}765$; $\sqrt{5} + \sqrt{3} = 3{,}9681$.

Über das Rechnen mit Quadratwurzel-Formen sei noch folgendes bemerkt:

1. Bei $\sqrt{a}$ läßt sich jeder mehr als einmal in a vorkommende Primfaktor vor das Wurzelzeichen setzen, z. B.: $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3 \cdot \sqrt{5}$, $\sqrt{432} = \sqrt{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt{(2^2)^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

2. Umgekehrt läßt sich der Koeffizient einer Wurzel unter das Wurzelzeichen bringen, z. B.: $3\sqrt{13} = \sqrt{3^2 \cdot 13} = \sqrt{117}$.

3. Einen Quotienten, dessen Divisor eine irrationale Quadratwurzel ist, pflegt man durch Erweitern so umzugestalten, daß der Divisor rational wird, z. B.:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2},$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{22}} = \frac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{22}}{22} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{11}}{22} = \frac{2}{11}\sqrt{33},$$

$$\frac{8}{15} \cdot \sqrt{\frac{175}{176}} = \frac{8}{15} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 7}{16 \cdot 11}} = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4} \cdot \sqrt{\frac{7}{11}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{11}}{(\sqrt{11})^2} = \frac{2}{33} \cdot \sqrt{77};$$

4. Aus dem Nenner eines Bruches pflegt mau Quadratwurzeln auch dann fortzuschaffen, wenn dieselben Teile einer Summe

oder einer *Differenz* sind. Es gelingt dies vermittels der Formeln $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b^2$ und $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$. Z. B.:

$$\frac{23}{7-\sqrt{3}} = \frac{23(7+\sqrt{3})}{49-3} = \frac{7+\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\frac{6\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-\sqrt{15}} = \frac{(6\sqrt{15}-2\sqrt{3})(4\sqrt{3}+\sqrt{15})}{48-15}$$

$$= \frac{72\sqrt{5}+90-24-6\sqrt{5}}{33} = \frac{66+66\sqrt{5}}{33} = 2+2\sqrt{5}.$$

---

§ 20. Imaginäre Zahlen.

$(\sqrt{a})^2 = a$, **wo a negativ ist.**

$$\sqrt{-b} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{b} = i\sqrt{b};\ -\sqrt{-b} = -\sqrt{-1}\cdot\sqrt{b} = -i\sqrt{b};$$

$$i^2 = -1 \text{ und } (-i)^2 = -1;\quad i^3 = -i,\quad i^4 = +1.$$

Auch wenn a *negativ* ist, soll $\sqrt{a}$ eine Wurzelform sein, deren Quadrat genau gleich a ist. Indem derartige Wurzelformen auch als Zahlen betrachtet werden, wird der Zahlbegriff von neuem erweitert (vgl. § 7, § 11, § 19). Z. B.: $\sqrt{-9}$ ist die Zahl, deren Quadrat -9 ist. Dies ist nicht etwa $+3$ oder -3, denn beide geben, quadriert, die Zahl $+9$. Die hiermit neu gewonnenen Zahlen heißen *imaginär* im Gegensatz zu allen bisher definierten Zahlen, einschließlich der irrationalen Zahlen, welche *reell* heißen. Um deutlicher hervortreten zu lassen, daß der Radikand negativ ist, nennen wir ihn $-b$, wo nun b positiv zu denken ist. Da $\sqrt{-b}$ eine Zahl ist, für deren Quadrat man $-b$ setzen soll, so ist $\sqrt{-b}$ eine Wurzel der Gleichung $x \cdot x = -b$. Diese Gleichung bleibt aber ungeändert, wenn man $-x$ statt x setzt. Deshalb hat man die zweite Wurzel der Gleichung $x \cdot x = -b$ mit $-\sqrt{-b}$

zu bezeichnen, wenn man die erste mit $+\sqrt{-b}$ bezeichnet hat.

Die neu eingeführten Zahlen kann man allen Rechnungsarten und Gesetzen der Arithmetik unterwerfen, solange man nicht gegen die Vorschrift verstößt, daß man $-b$ für $(+\sqrt{-b})^2$ und auch für $(-\sqrt{-b})^2$ setzen soll. Namentlich beachte man in dieser Hinsicht die beiden folgenden Formeln, in denen b und c positiv zu denken sind:

$$\text{I.} \quad (+\sqrt{-b})\cdot(+\sqrt{+c}) = +\sqrt{-bc};$$
$$\text{II.} \quad (+\sqrt{-b})\cdot(-\sqrt{-c}) = -\sqrt{+bc}.$$

Um die Richtigkeit von I. zu erkennen, betrachte man $+\sqrt{-b}$ als eine Wurzel der Gleichung $x^2 = -b$ und $+\sqrt{+c}$ als eine Wurzel der Gleichung $y^2 = +c$. Durch Multiplikation beider Gleichungen erhält man $(xy)^2 = -bc$, woraus für $x \cdot y$ entweder $+\sqrt{-bc}$ oder $-\sqrt{-bc}$ folgt. Da $+\sqrt{-b}$ und $+\sqrt{+c}$ eindeutig waren, so kann auch das Produkt beider nur einen einzigen Wert haben, wenn man auch bei imaginären Zahlen an der Eindeutigkeit der Multiplikation festhalten will. Welchen von den beiden gefundenen Werten man zu wählen hat, entscheidet am besten der spezielle Fall $c = 1$. Dann kommt

$$(+\sqrt{-b})\cdot(+\sqrt{1}) = +\sqrt{-b}\cdot 1.$$

Wenn man demnach auch für imaginäre Zahlen den Satz aufrecht erhält, daß eine Zahl durch Multiplikation mit 1 unverändert bleibt, so ergibt sich $+\sqrt{-b}$. Damit ist I. bewiesen.

Um die Richtigkeit von II. zu erkennen, verfährt man ähnlich, indem man $x^2 = -b$, $y^2 = -c$ setzt und aus $x^2 y^2 = +bc$ findet, daß xy entweder gleich $+\sqrt{+bc}$ oder gleich $-\sqrt{+bc}$ ist. Die Entscheidung ergibt sich

dann, indem man speziell $c = b$ setzt und beachtet, daß $\sqrt{-b} \cdot \sqrt{-b}$ ein Produkt ist, das nur gleich $-b$ gesetzt werden darf, weil man sich durch die Definition $(\sqrt{-b})^2 = -b$ verpflichtet hat, $\sqrt{-b} \cdot \sqrt{-b} = -b$ zu setzen.

Aus der umgekehrt gelesenen Formel I. ergibt sich für $b = 1$, daß $+\sqrt{-c} = (+\sqrt{-1}) \cdot (+\sqrt{c})$ ist, woraus auch $-\sqrt{-c} = (-\sqrt{-1}) \cdot (+\sqrt{c})$ folgt. Hieraus folgt der Satz:

Jede imaginäre Zahl ist gleich dem Produkte einer reellen und zwar positiven Zahl mit der Zahl $+\sqrt{-1}$ oder mit der Zahl $-\sqrt{-1}$. Deshalb nennt man $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ die imaginären Einheiten und gebraucht für dieselben besondere Zeichen, nämlich $+i$ und $-i$. Z. B.:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = i \cdot \sqrt{4} = 2i;$$

$$\sqrt{-\frac{3}{4}} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} i \sqrt{3};$$

$$-\sqrt{-\frac{1}{3}} = -i \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} i \sqrt{3}.$$

Das Rechnen mit imaginären Zahlen bietet gar keine Schwierigkeit, wenn man jede derselben als positives oder negatives Produkt von i und einer reellen Zahl auffaßt, mit i wie mit einem beliebigen Buchstaben rechnet, aber immer dabei beachtet, daß $(+i)^2 = -1$ und $(-i)^2 = -1$ zu setzen ist. Z. B.:

$(3 \cdot \sqrt{-5})(2\sqrt{20}) = 3i\sqrt{5} \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 60i;$

$(3 \cdot \sqrt{-5})(2\sqrt{-20}) = 3i\sqrt{5} \cdot 4i\sqrt{5} = 60i^2 = -60;$

$(\sqrt{-1})^3 = i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i;$

$(\sqrt{-1})^4 = i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = +1;$

$i^5 = i^4 \cdot i = (+1) i = +i,$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1,$

$i^7 = -i, \quad i^8 = +1$ usw.

Sind a und b reell, so ist die Gleichung $ia = b$ nur möglich, wenn a und b null sind. Denn aus $ia = b$ folgt durch Quadrieren $i^2 a^2 = b^2$ oder $-a^2 = b^2$, eine Gleichung, auf deren rechter Seite eine reelle Zahl steht, die nicht negativ sein kann, und auf deren linker Seite eine reelle Zahl steht, die nicht positiv sein kann. Die Gleichung enthält also nur dann keinen Widerspruch, wenn a und b beide null sind. Folglich gilt der Satz:

Das reelle Zahlengebiet und das imaginäre Zahlengebiet haben nur die Zahl Null gemeinsam.

Wenn man Zahlen, die reell oder imaginär sind, durch Multiplikation oder Division verknüpft, so gelangt man immer wieder zu Zahlen, die reell oder imaginär sind. Denn:

$$a(ib) = i(ab); \quad (ia)(ib) = -ab;$$
$$a:(ib) = ia:(i^2 b) = -i(a:b), \quad ia:(-b) = -i(a:b);$$
$$ia:(-ib) = -(a:b).$$

Ebenso führt die Addition und Subtraktion von zwei Zahlen, die beide imaginär sind, stets zu einer imaginären Zahl, nämlich:

$$ia + ib = i(a + b); \quad ia - ib = i(a - b).$$

Wenn man aber zwei von Null verschiedene Zahlen, von denen die eine reell, die andere imaginär ist, durch Addition oder Subtraktion miteinander verknüpft, so gelangt man zu einer Zahlform, von der sich nachweisen läßt, daß sie weder reell noch imaginär ist. Denn wäre $a + ib = r$, wo r reell ist, so müßte $ib = r - a$, also nach dem obigen Satze $b = 0$ sein, was der Voraussetzung widerspricht. Ebensowenig kann $a + ib$ rein imaginär, also etwa gleich ir sein. Denn dann müßte $a = i(r - b)$, also a null sein, was

nicht der Fall sein soll. Die so neugewonnene Zahlform $a+ib$ nennt man imaginär-komplex oder kurz komplex. Oft nennt man auch die komplexen Zahlen imaginär und kennzeichnet diejenigen, bei denen a null ist, die also von der Form ib sind, als rein-imaginär.

Die Zahlform $a+ib$, wo a und b beliebige positive oder negative, rationale oder irrationale Zahlen oder auch null sind, ist die allgemeinste Zahlform, auf welche die Gesetze der Arithmetik führen; so daß auch die im VI. Abschnitt behandelten Rechnungsarten dritter Stufe auf keine neuen oder noch allgemeineren Zahlen führen. Mit $a+ib$ sind also die in § 7, § 13, § 19 ermöglichten allmählichen Erweiterungen des Zahlbegriffs zum Abschluß gelangt.

Wenn zwei komplexe Zahlen $a+ib$ und $a'+ib'$ gleich sind, so fließen daraus **zwei** Gleichheiten zwischen reellen Zahlen, nämlich sowohl $a=a'$ als auch $b=b'$. Denn aus $a+ib=a'+ib'$ folgt $a-a'=i(b'-b)$. Nun haben aber das reelle und das imaginäre Zahlengebiet nur die Zahl Null gemein, also muß $a-a'$ und $b'-b$ null sein, d. h. $a=a'$ und $b=b'$.

Daß man beim Rechnen mit komplexen Zahlen durch Anwendung der bisher definierten Rechnungsarten immer wieder auf komplexe Zahlen stößt, zeigt folgende Übersicht:

1. Addition: $(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d)$;
2. Subtraktion: $(a+ib)-(c+id)=a-c+i(b-d)$;
3. Multiplikation:
$$(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc);$$
4. Division:
$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2-i^2d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2};$$

5. Quadrierung: $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i \cdot 2ab$,

6. Radizierung: $\sqrt{a \pm ib} = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\pm i \cdot \sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Von der Richtigkeit der letzten Formel überzeugt man sich dadurch, daß man ihre rechte Seite quadriert, wodurch man durch Vereinfachung $a \pm ib$ findet.

---

§ 21. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Wenn $x^2 + ax + b = 0$ ist,

so ist $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.

Rein-quadratisch heißt jede Gleichung, welche sich auf die Form $ex^2 = f$ bringen läßt. Ihre Lösung besteht im Radizieren (§ 18) von $\frac{f}{e}$. Ihre Wurzeln heißen also $+\sqrt{\frac{f}{e}}$ und $-\sqrt{\frac{f}{e}}$.

Gemischt-quadratisch, allgemein-quadratisch oder auch nur quadratisch heißt jede Gleichung, welche sich schließlich auf die geordnete Form

$$x^2 + ax + b = 0$$

bringen läßt, wo a und b, die beiden Koeffizienten der Gleichung, bekannte Zahlen sind. Ihre Lösung besteht darin, daß man b transponiert, beiderseits $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ addiert, wodurch man links das Quadrat von $x + \frac{a}{2}$ erhält, dann

radiziert, und endlich $+\frac{a}{2}$ transponiert. So ergibt sich die in der Überschrift genannte Formel, die zwei Werte von x liefert. Z. B.:

$$\frac{11x-19}{x-1}-\frac{7-x}{x+1}=6$$

gibt durch Vereinfachung zunächst:

$$6x^2-16x-6=0.$$

Daraus folgt die geordnete Form:

$$x^2-\frac{8}{3}x-1=0,$$

woraus durch Anwendung unserer Formel sich ergibt:

$$x=\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}+1}=\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{4}{3}\pm\frac{5}{3},$$

also x entweder gleich $+3$ oder gleich $-\frac{1}{3}$. Beide Werte befriedigen die gestellte Gleichung. Die beiden Werte von x, die man aus einer quadratischen Gleichung erhält, nennt man auch ihre Wurzeln.

Unterscheidet man die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung dadurch, daß man sie x_1 und x_2 nennt, so hat man:

$$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}; \quad x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}.$$

Addiert man nun x_1 und x_2, so erhält man:

$$x_1+x_2=-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=-a.$$

Multipliziert man x_1 und x_2, so kommt:

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{a}{2}\right)^2-\left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right]^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+b=+b.$$

Diese Resultate heißen in Worten:

1. Die Summe der beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist gleich dem mit minus eins multiplizierten Koeffizienten von x in ihrer geordneten Form.

2. Das Produkt der beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist gleich dem von x freien Gliede in ihrer geordneten Form.

So ist bei dem obigen Zahlenbeispiele

$$x_1 + x_2 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1.$$

Setzt man umgekehrt in $x^2 + ax + b$ den Koeffizienten $a = -(x_1 + x_2)$ und $b = +x_1 x_2$, so erhält man:

$$x^2 + ax + b = x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = (x - x_1)(x - x_2).$$

Diese Formel lehrt, wie man einen quadratischen Ausdruck $x^2 + ax + b$ in zwei Faktoren ersten Grades, nämlich $x - x_1$ und $x - x_2$ zu zerlegen hat. Um z. B. $x^2 - 16x + 39$ in zwei Faktoren zu zerlegen, setzt man $x^2 - 16x + 39 = 0$, löst die erhaltene Gleichung und setzt die gefundenen Wurzeln in $(x - x_1)(x - x_2)$ für x_1 und x_2 ein. Da die Wurzeln hier 13 und 3 sind, so muß $x^2 - 16x + 39 = (x - 13)(x - 3)$ sein. Hat x^2 einen anderen Koeffizienten als 1, so hat man denselben vorher abzusondern, z. B.:

$$3x^2 - 17x + 20 = 3\left(x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{20}{3}\right) = 3(x - 4)\left(x - \frac{5}{3}\right)$$
$$= (x - 4)(3x - 5).$$

Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung können auch irrational werden. Z. B. liefert die Gleichung $x^2 - 10x + 23 = 0$ die Wurzeln $x = 5 \pm \sqrt{2} = 6{,}414$ oder $3{,}586$. Auch können die Koeffizienten selbst schon irrational sein. Z. B. liefert die Gleichung $x^2 + 2x\sqrt{3} - 1$

$= 0$ die Wurzeln $-\sqrt{3} \pm 2 = +0{,}268$ oder $-3{,}732$. Wenn die Koeffizienten einer quadratischen Gleichung reell sind, so könnten trotzdem die beiden Wurzeln komplexe Zahlen werden. Dann aber müssen sie konjugiert-komplex sein, d. h. sich nur durch das Vorzeichen der imaginären Einheit i unterscheiden, z. B. liefert die Gleichung $x^2 - 6x + 14 = 0$ die Wurzeln $3 \pm i\sqrt{5} = 3 + i \cdot 2{,}236$ oder $3 - i \cdot 2{,}236$.

Aus der Gestalt der Formel $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ ergibt sich, daß die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ reell sind, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 > b$ ist, reell und einander gleich sind, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b$ ist, konjugiert-komplex sind, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 < b$ ist.

Aus den Beziehungen zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln einer quadratischen Gleichung, wonach $b = x_1 \cdot x_2$, $a = -(x_1 + x_2)$ ist, folgen für den Fall, daß a, b, x_1, x_2 reell sind, folgende Sätze:

1. Ist b negativ, so ist die eine Wurzel positiv, die andere negativ.

2. Ist b positiv, so sind die Wurzeln entweder beide positiv oder beide negativ, je nachdem a negativ oder positiv ist.

Für die praktische Lösung von Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ist folgendes zu beachten:

1. Gleichungen vierten Grades, die außer einem von x freien Gliede nur x^4 und x^2 enthalten, werden gelöst, indem man x^2 als Unbekannte betrachtet. Z. B.:

$x^4 - 10x^2 - 96 = 0$ ergibt $(x^2)_1 = +16$, $(x^2)_2 = -6$, woraus für x vier Werte hervorgehen, nämlich $x_1 = +4$, $x_2 = -4$, $x_3 = +i\sqrt{6}$, $x_4 = -i\sqrt{6}$.

2. Symmetrische Gleichungen vierten Grades, d. h. Gleichungen von der Form $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ oder $x^4 + ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$, werden dadurch gelöst, daß man die neue Unbekannte $y = x + \frac{1}{x}$ oder $y = x - \frac{1}{x}$ einführt. Z. B.: $4x^4 - 25x^3 + 42x^2 - 25x + 4 = 0$ ergibt $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x + \frac{1}{x}\right) + 42 = 0$. Setzt man nun $x + \frac{1}{x} = y$, also $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y^2$, so erhält man:

$$4(y^2 - 2) - 25y + 42 = 0,$$

woraus $y_1 = 4\frac{1}{4}$, $y_2 = 2$ sich ergibt. Daher muß einerseits $x + \frac{1}{x} = 4\frac{1}{4}$, andererseits $x + \frac{1}{x} = 2$ sein, woraus folgt: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$. Da eine symmetrische Gleichung sich auf die Form

$$A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + C = 0$$

bringen läßt, und diese Form durch Vertauschung von x und $\pm\frac{1}{x}$ in sich selbst übergeht, so muß, wenn $x = \frac{a}{b}$ Wurzel einer symmetrischen Gleichung ist, dies auch $x = \pm\frac{b}{a}$ sein.

3. Wurzeln, unter denen die Unbekannte vorkommt, müssen zunächst durch Transponieren isoliert werden, dann erst muß quadriert werden. Z. B.:

a) $18 - 3\sqrt{x} = x$ ergibt zunächst $18 - x = 3\sqrt{x}$, woraus durch Quadrieren folgt: $324 - 36x + x^2 = 9x$ oder $x^2 - 45x + 324 = 0$, also $x_1 = 36$, $x_2 = 9$. Durch Einsetzen erkennt man, daß nur $x = 9$ die gegebene Gleichung befriedigt, während $x = 36$ die Gleichung $18 + 3\sqrt{x} = x$ erfüllt.

b) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2}$ ergibt zuerst: $2x + 3 - 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} + x + 1 = x - 2$ oder: $2x + 6 = 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3}$ oder $x + 3 = \sqrt{2x^2 + 5x + 3}$, oder quadriert: $x^2 + 6x + 9 = 2x^2 + 5x + 3$, woraus $x_1 = +3$, $x_2 = -2$ folgt. Die Einsetzung von $x = +3$ ergibt, daß $x = 3$ Wurzel der ursprünglich gegebenen Gleichung ist, während $x = -2$ die Gleichung $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2}$ erfüllt.

4. Wenn beide Seiten einer Gleichung einen gemeinsamen, x enthaltenden Faktor besitzen, so zerfällt die Gleichung in zwei Gleichungen. Die eine entsteht, indem man jenen Faktor gleich null setzt, die andere, indem man den Faktor überall fortläßt. Z.B.: $(x^2 - 4)x = (x-2)(x+5)$ ergibt einerseits $x - 2 = 0$, also $x_1 = 2$, andererseits $(x+2)x = x + 5$ oder $x^2 + x - 5 = 0$, woraus $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$, $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$ folgt.

Bei symmetrischen Gleichungen fünften Grades erscheint $x - 1$ oder $x + 1$ als gemeinsamer Faktor. Z.B.: $4x^5 - 21x^4 + 17x^3 + 17x^2 - 21x + 4 = 0$ ergibt zuerst $4(x^5 + 1) - 21x(x^3 + 1) + 17x^2(x + 1) = 0$. Da jedes Glied durch $x + 1$ teilbar ist (§ 12), so erhält man $x + 1 = 0$, d. h. $x_1 = -1$ und außerdem: $4(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 21x(x^2 - x + 1) + 17x^2 = 0$, woraus durch Vereinfachung die oben gelöste symmetrische Gleichung vierten Grades entsteht, so daß $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$ herauskommt.

Bei den eingekleideten quadratischen Gleichungen ist dasselbe zu beachten, wie bei den eingekleideten Gleichungen ersten Grades (§ 16). Von den beiden Werten aber, welche man aus der arithmetisch ausgesprochenen Gleichung immer erhält, gibt nicht immer jeder eine Antwort auf die in Worten gestellte Frage. Wenn z. B. x eine Anzahl Personen bedeutet, so kann nur ein positiv-ganzzahliger Wert von x die gestellte Frage beantworten. Es sei z. B. die folgende Aufgabe gegeben:

„Nachdem bei einem Diner ein Toast gehalten ist, stößt jeder mit jedem anderen an. Man hört 120 mal Gläser zusammenklingen. Wieviel Personen nahmen an dem Diner teil?"

Ist x die gesuchte Zahl, so erhält man, da jeder mit $x - 1$ Personen anstößt, ein Anstoßen des A mit B und des B mit A aber als nicht verschieden gilt, den Ansatz:

$$\frac{1}{2} x(x-1) = 120 \quad \text{oder} \quad x^2 - x - 240 = 0,$$

woraus $x_1 = +16$, $x_2 = -15$ sich ergibt. Der Wert $x_2 = -15$ ist für die vorliegende Einkleidung unbrauchbar. Die Antwort lautet also eindeutig: „Es nahmen 16 Personen teil."

§ 22. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Wenn zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben sind, so hat man daraus eine einzige Gleichung mit nur einer Unbekannten abzuleiten, diese zu lösen, und aus den erhaltenen Wurzeln die gesuchten Unbekannten zu bestimmen. Sind die ursprünglich gegebenen Gleichungen beide allgemeine Gleichungen zweiten Grades zwischen x und y, also jede von der Form:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

so hängt die Auffindung der Werte der Unbekannten im allgemeinen von der Lösung einer allgemeinen Gleichung vierten Grades ab, die also die Form hat:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

In besonderen Fällen jedoch gelingt es, die Auffindung der Werte der Unbekannten von der Lösung einer oder mehrerer Gleichungen zweiten Grades abhängig zu machen. Von diesen Fällen sind die folgenden am wichtigsten.

1. Die eine Gleichung ist ersten Grades. Z. B.:

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 2x^2 - xy + y^2 = x + 3. \end{cases}$$

Man drückt vermittels der Gleichung ersten Grades die eine Unbekannte durch die andere aus, hier $y = 6 - 4x$, und setzt den erhaltenen Ausdruck in die andere Gleichung ein. Dadurch kommt hier:

$$2x^2 - (6 - 4x)x + (6 - 4x)^2 = x + 3$$

oder: $22x^2 - 55x + 33 = 0$ oder $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$, woraus folgt:

$x_1 = 1$ und $x_2 = 1\frac{1}{2}$, woraus durch Einsetzung in die Substitutionsgleichung folgt: $y_1 = 2$, $y_2 = 0$. Man erhält also zwei Wertepaare: entweder $x = 1$ und $y = 2$ oder $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 0$.

2. Aus den beiden gegebenen Gleichungen entsteht durch Elimination der quadratischen Glieder eine dritte Gleichung, die vom ersten Grade ist und mit irgend einer der gegebenen Gleichungen zu verbinden ist, wodurch Fall 2 auf Fall 1 zurückgeführt ist. Z. B.:

$$\begin{cases} 3xy + x - 5y = 5 \\ x(y+1) = 8. \end{cases}$$

Dadurch, daß man die zweite Gleichung mit 3 multipliziert, dann von der ersten subtrahiert, wird das quadratische Glied xy eliminiert. Dann kommt:

$$-2x - 5y = -19, \quad \text{also} \quad x = \frac{19 - 5y}{2},$$

daher durch Einsetzung:

$$(19 - 5y)(y + 1) = 16 \quad \text{oder} \quad 5y^2 - 14y - 3 = 0,$$

woraus $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{1}{5}$ folgt, was mit $x_1 = 2$, $x_2 = 10$ zu verbinden ist.

3. Die Einführung einer neuen Unbekannten bewirkt, daß die eine Gleichung nur noch diese, also eine einzige Unbekannte enthält. Namentlich gilt dies, wenn diese Gleichung homogen ist, d.h. nur quadratische Glieder enthält. Z. B.:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 10 = 7x + 5y. \end{cases}$$

Man dividiert die erste Gleichung durch y^2, setzt $\frac{x}{y} = t$ und erhält:

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \quad \text{also} \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2.$$

Nun setzt man einerseits $\frac{x}{y} = 1$, also $x = y$, andererseits $\frac{x}{y} = 2$, also $x = 2y$ in die andere Gleichung ein. Dann kommt:

$$2y^2 - 12y + 10 = 0 \quad \text{und} \quad 5y^2 - 19y + 10 = 0,$$

also: $y_1 = 5$, $y_2 = 1$ sowie $y_{3,4} = \frac{19}{10} \pm \frac{1}{10}\sqrt{161}$. Die zugehörigen Werte von x folgen aus $x = y$ bzw. $x = 2y$, also $x_1 = 5$, $x_2 = 1$ und $x_{3,4} = \frac{19}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{161}.$

4. Die Einführung mehrerer neuer Unbekannten vereinfacht das gegebene Gleichungssystem. Namentlich beachte man, daß, wenn man $x+y=s$, $x-y=d$, $x^2+y^2=q$, $xy=p$ setzt, zwischen s, d, q, p die Gleichungen bestehen:

$$s^2=q+2p$$
$$d^2=q-2p.$$

Kann man vermittels dieser und der gegebenen Gleichungen s und d bestimmen, so ist das Ziel erreicht, da $x=\frac{1}{2}(s+d)$, $y=\frac{1}{2}(s-d)$ ist. Z. B.:

a) $$\begin{cases} x^2+y^2=x+y+8 \\ xy=x+y+1. \end{cases}$$

Durch Einsetzung der neuen Unbekannten erhält man:

$$\begin{cases} q=s+8 \\ p=s+1. \end{cases}$$

Dazu gesellt sich $s^2=q+2p$. Also kommt durch Elimination von q und p:

$$s^2=s+8+2(s+1) \quad \text{oder} \quad s^2-3s-10=0,$$

woraus $s_1=5$, $s_2=-2$ folgt, daraus $q_1=13$, $q_2=6$, $p_1=6$, $p_2=-1$. Benutzt man nun, daß $d^2=q-2p$ ist, so kommt $(d^2)_1=1$ und $(d^2)_2=8$. Man hat also $s=5$ mit $d=\pm 1$ und außerdem $s=-2$ mit $d=\pm 2\sqrt{2}$ zu verbinden. So erhält man die vier Wertepaare:

$$\left\{\begin{matrix} x_1 = \\ y_1 = \end{matrix}\left|\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} \end{matrix}\right\|\Bigg\}.$$

b) $$\begin{cases} x+xy+y=19 \\ x^2+x^2y^2+y^2=169. \end{cases}$$

Trotzdem die zweite Gleichung vierten Grades ist, gelingt die Lösung mit Hilfe quadratischer Gleichungen. Man erhält nämlich:

$$\begin{cases} s + p = 19 \\ q + p^2 = 169 \\ s^2 = q + 2p, \end{cases}$$

also: $(19 - p)^2 = (169 - p^2) + 2p$

oder: $2p^2 - 40p + 192 = 0,$

also $p_1 = 12$, $p_2 = 8$, daher $s_1 = 7$, $s_2 = 11$, $q_1 = 25$, $q_2 = 105$, woraus folgt: $(d^2)_1 = 1$, $(d^2)_2 = 89$. Daraus ergeben sich die vier Wertepaare:

$$\left\{ \begin{array}{l|c|c|c|c|} x = & 4 & 3 & 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{89} & 5\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{89} \\ y = & 3 & 4 & 5\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{89} & 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{89} \end{array} \right\}.$$

Man beachte, daß auch $x^3 + y^3$, $x^3 - y^3$, $x^4 + y^4$, $x^4 - y^4$ usw. sich leicht durch s, d, q, p ausdrücken lassen, nämlich:

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = s(q - p),$
$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = d(q + p),$
$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = q^2 - 2p^2,$
$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y) = qsd,$
$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = s(q^2 - p^2 - pq).$

5. Durch Absondern eines Faktors auf beiden Seiten der einen Gleichung zerfällt das gegebene Gleichungs-System in zwei einfachere Systeme. Z. B.:

$$\begin{cases} x^4 = y^4 + 3(x^2 + y^2) \\ xy = 2 \end{cases}$$

ergibt: $\left\{ \begin{array}{r} (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 3(x^2 + y^2) \\ xy = 2 \end{array} \right\};$

also hat man einerseits $\left\{ \begin{array}{r} x^2 + y^2 = 0 \\ xy = 2 \end{array} \right\}$, andererseits $\left\{ \begin{array}{r} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{array} \right\}$. Durch Lösung dieser beiden Gleichungssysteme erhält man:

$x =$	$1+i$	$1-i$	$-1+i$	$-1-i$	$+2$	-2	$+i$	$-i$
$y =$	$1-i$	$1+i$	$-1-i$	$-1+i$	$+1$	-1	$-2i$	$+2i$

Gleichungssysteme mit mehr als zwei Unbekannten löst man nach dem Vorbilde des oben besprochenen ersten Falls, wenn nur eine Gleichung vom zweiten Grade ist. Sind mehrere Gleichungen quadratisch, so sucht man einfachere Gleichungen abzuleiten oder durch Einführung neuer Unbekannten eine Vereinfachung des Gleichungssystems zu bewirken, und so schließlich das Hauptziel, die Aufstellung einer quadratischen Gleichung mit nur einer Unbekannten, zu erreichen. Z. B.:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases}$$

Man kann hier $y + z$, $y \cdot z$ und $y^2 + z^2$ durch x ausdrücken. Wenn man die erhaltenen Ausdrücke dann in $(y + z)^2 = (y^2 + z^2) + 2(y z)$ einsetzt, erhält man eine nur x enthaltende Gleichung, nämlich:

$$(6 - x)^2 = 14 - x^2 + 2(7 - x^2).$$

Hieraus findet man $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, daraus durch Einsetzen y und z.

VI. Abschnitt.

Rechnungsarten dritter Stufe.

---

§ 23. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

I. $a^p = \overset{1)}{a} \cdot \overset{2)}{a} \cdot \overset{3)}{a} \cdots \overset{p)}{a}$ (**Erklärende Formel**);

II. $a^p \; a^q = a^{p+q}$

III. $a^p : a^q = a^{p-q}$, **wenn** $p > q$

IV. $a^p : a^q = 1 : a^{q-p}$, **wenn** $q > p$

(II.–IV.) **Verteilungsformeln bei gleicher Basis;**

V.	$a^q \cdot b^q = (a \cdot b)^q$	Verteilungsformeln bei gleichem Exponenten;
VI.	$a^q : b^q = (a : b)^q$	
VII.	$(a^p)^q = a^{pq}$	Verbindungsformeln;
VIII.	$(a^p)^q = (a^q)^p$	
IX.	$a^0 = 1$;	
X.	$a^{-p} = 1 : a^p$.	

Eine Zahl a mit einer Zahl p potenzieren heißt, ein Produkt von p Faktoren bilden, von denen jeder a heißt. Die Zahl a, welche als Faktor eines Produkts gesetzt wird, heißt Basis, die Zahl p, welche angibt, wie oft die andere Zahl a als Faktor eines Produkts gesetzt werden soll, heißt Exponent. Das Resultat der Potenzierung, welches man a^p schreibt und „a hoch p" liest, heißt Potenz. Man nennt a^p wohl auch „die p-te Potenz von a". Da der Exponent ein „wie oft" zählt, so kann derselbe nur ein Ergebnis des Zählens, also eine positive ganze Zahl sein. Dagegen kann die Basis jede beliebige Zahl sein. Z. B.: $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = +81$, $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125}$, $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$. Da man a als Produkt von einem Faktor auffassen kann, so setzt man $a^1 = a$.

Spezielle Potenzen, nämlich diejenigen, welche den Exponenten 2 haben, sind unter dem Namen „Quadrate" schon im V. Abschnitt ausführlich behandelt. Die Potenzen mit dem Exponenten 3 heißen auch „Kuben" und die dritten Potenzen der natürlichen Zahlen „Kubikzahlen", Ausdrücke, die sich dadurch erklären, daß man, behufs Bestimmung des Volumens eines Kubus, d. h. eines Würfels, die Maßzahl seiner Kantenlänge mit 3 zu potenzieren hat. Die ersten zehn Kubikzahlen sind:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Auch Potenzen von höheren Exponenten sind in den vorangehenden Paragraphen, von § 8 an, wiederholt vorgekommen, jedoch immer nur als abgekürzt geschriebene Produkte behandelt. Von jetzt an soll aber die Potenzierung als eine besondere Rechnungsart betrachtet werden, die aus der Multiplikation ebenso entsteht, wie diese aus der Addition entstand, und deshalb auch dritter Stufe heißen muß

Die Formeln II. bis VIII. folgen aus der Erklärung der Potenzierung mit Benutzung der Gesetze der Multiplikation und Division, sie entsprechen ganz den auf die Multiplikation bezüglichen Formeln des § 8 und sind analog zu beweisen. Zwischen den Gesetzen der Potenzierung und denen der Multiplikation besteht nur der wesentliche Unterschied, daß bei der Potenzierung das Vertauschungsgesetz ungültig ist, da im allgemeinen a^b nicht gleich b^a ist.

Das Rechnen mit Potenzen, deren Exponenten auch Buchstaben-Ausdrücke sein können, zeigen folgende Beispiele:

1. $(a^p b^{q-3})(a b^{q+4}) = a^{p+1} \cdot b^{q-3+q+4} = a^{p+1} \cdot b^{2q+1}$;
2. $(a^{5x-y} b^{x+3y}) : (a^{4x-y} b^{x+2y}) = a^{5x-y-4x+y} \cdot b^{x+3y-x-2y}$
$= a^x \cdot b^y$;
3. $(2a)^{3b} \cdot (4a)^{3b} = 2^{3b} \cdot 4^{3b} \cdot a^{3b} \cdot a^{3b} = 8^{3b} \cdot a^{6b} = (512 a^6)^b$;
4. $\left(-3\frac{1}{3}a\right)^2 (0{,}45)^3 : (3a)^3 = +\frac{100\,a^2}{9} \cdot \frac{729}{8000} : 27a^3 = \frac{3}{80a}$;
5. $(a+b)^m (a-b)^m = [(a+b)(a-b)]^m = (a^2-b^2)^m$;
6. $(p^{a+b})^{a+b} = p^{(a+b)(a+b)} = p^{a^2+2ab+b^2}$;
7. Man beachte, daß $(a+b)^n$ **nicht** gleich $a^n + b^n$ ist.

Ist die Basis einer Potenz nicht eine bloße Zahl

oder ein einzelner Buchstabe, sondern ein Ausdruck, so ist derselbe in eine Klammer einzuschließen. Dagegen macht die höhere Stellung des Exponenten eine Klammer um denselben überflüssig.

Nach der Erklärung der Potenzierung sind a^0 und a^{-n}, wo $-n$ eine negative ganze Zahl ist, sinnlose Zeichen. Auch Produkte, deren Multiplikator null oder negativ ist, waren nach der ursprünglichen Erklärung der Multiplikation sinnlose Zeichen. Doch erhielten solche Zeichen in § 8 dadurch Sinn, daß man sie als Differenzen (§ 7) auffaßte und erklärte, daß man mit solchen Differenzen ebenso rechnen wolle, wie mit Differenzen, die eine positive Zahl darstellen. In derselben Weise verfährt man mit den Potenzformen

$$a^0 \text{ und } a^{-n}.$$

Man setzt also $a^0 = a^{p-p}$, hebt die Beschränkung $p > q$ in Formel III. auf, und wendet dieselbe, umgekehrt gelesen, an. Dann kommt:

$$a^0 = a^{p-p} = a^p : a^p, \text{ also} = 1.$$

Ebenso setzt man $a^{-n} = a^{p-(p+n)}$, hebt die Beschränkung $p > q$ in III. auf, findet dadurch $a^p : a^{p+n}$, wendet nun Formel IV. an, und erhält $1 : a^n$. Hiernach haben auch Potenzen, deren Exponenten null oder negativ sind, Sinn bekommen, nämlich:

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = 1 : a^n. \quad \text{Z. B.:}$$

$$12^0 = 1; \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1; \quad 4^{-3} = 1 : 4^3 = \frac{1}{64};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}; \quad (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

Für derartige Potenzformen gelten dieselben Gesetze, wie für eigentliche Potenzen. Mit Hilfe der negativen Exponenten kann man jede Potenz aus dem

Nenner eines Bruches in den Zähler und aus dem Zähler in den Nenner stellen, indem man das **Vorzeichen** des Exponenten in das entgegengesetzte verwandelt. Z. B.:

$$\frac{a^m}{b^q} = a^m \cdot b^{-q}; \qquad \frac{a^5 b^{-3} c^{-2}}{d^{-4} e^{-1} f^6} = \frac{a^5 d^4 e}{b^3 c^2 f^6}.$$

---

§ 24. Wurzeln.

I. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ **(Erklärende Formel);**

II. $\sqrt[n]{a^n} = a$;

III. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

IV. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$ — III. und IV.: **Verteilungsformeln;**

V. $\sqrt[p]{a^q} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$

VI. $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$ — V. und VI.: **Verbindungsformeln;**

VII. $\sqrt[np]{a^{nq}} = \sqrt[p]{a^q}$;

VIII. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, **auch wenn a keine n-te Potenz ist.**

Wenn man in $b^n = a$ nicht, wie beim Potenzieren, b und n als gegeben, a als gesucht, sondern a und n als gegeben, b als gesucht betrachtet, so entsteht die zur Potenzierung umgekehrte Rechnungsart, welche „Radizierung bei beliebigem Exponenten“ oder kurz „**Radizierung**“ heißt.

Man versteht also unter „n-ter Wurzel aus a“, geschrieben $\sqrt[n]{a}$, die Zahl, welche, mit n potenziert, a gibt. Demnach ist $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ die erklärende Formel der Radizierung. Ebenso ist $\sqrt[n]{a^n} = a$, weil $\sqrt[n]{a^n}$ die Zahl bedeutet, welche, mit n potenziert, a^n gibt, und die Zahl a diese Forderung erfüllt. Die Zahl, welche ursprünglich Potenz war, heißt bei der Radizierung **Radikandus**, die Zahl, welche Potenz-Exponent war, **Wurzel-Exponent** und die Zahl, welche Basis war, **Wurzel**. Es ist z. B. bei $\sqrt[4]{81} = 3$ die Zahl 81 Radikand, 4 Wurzel-Exponent, 3 Wurzel. Ist der Wurzel-Exponent die Zahl 2, so pflegt man ihn fortzulassen, z. B. $\sqrt{36} = 6$. Für diesen speziellen Fall ist die Wurzel schon im V. Abschnitt (§ 18) behandelt.

Die Beweise der Formeln III. bis VII. ergeben sich aus der Erklärung der Wurzel in analoger Weise, wie sich die Formeln des § 10 aus der Erklärung der Division ergaben, nämlich:

III. ist richtig, weil $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$ $= a \cdot b$ ist;

IV. ist richtig, weil $\left(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n : \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$ $= a : b$ ist;

V. ist richtig, weil $\left[\left(\sqrt[p]{a}\right)^q\right]^p = \left[\left(\sqrt[p]{a}\right)^p\right]^q = a^q$ ist;

VI. ist richtig, weil $\left(\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}\right)^{pq} = \left[\left(\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}\right)^p\right]^q$ $= \left[\sqrt[q]{a}\right]^q = a$ ist;

VII. ist richtig, weil $\left(\sqrt[p]{a^q}\right)^{np} = \left[\left(\sqrt[p]{a^q}\right)^p\right]^n = [a^q]^n$ $= a^{nq}$ ist.

Wie durch Anwendung dieser Formeln sich Ausdrücke, die Wurzeln enthalten, umformen lassen, zeigen folgende Beispiele:

1. $\sqrt[m]{a^{7p-q}} \cdot \sqrt[m]{a^{q+4}} = \sqrt[m]{a^{7p-q+q+4}} = \sqrt[m]{a^{7p+4}}$;

2. $\sqrt[p]{a^3b^4} : \sqrt[p]{a^2b^5} = \sqrt[p]{a^{3-2}b^{4-5}} = \sqrt[p]{ab^{-1}}$;

3. $\sqrt[5]{a^{17}} = \sqrt[5]{a^{15} \cdot a^2} = \sqrt[5]{a^{15}} \cdot \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{(a^3)^5} \cdot \sqrt[5]{a^2}$
$= a^3 \cdot \sqrt[5]{a^2}$;

4. $\sqrt[4]{a^3b} \cdot \sqrt[6]{a^2b^3} \cdot \sqrt[8]{ab} = \sqrt[24]{a^{18}b^6} \cdot \sqrt[24]{a^8b^{12}} \cdot \sqrt[24]{a^3b^3}$
$= \sqrt[24]{a^{29}b^{21}} = a \cdot \sqrt[24]{a^5b^{21}}$;

5. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3b^6}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3b^6}} = \sqrt[4]{ab^2}$.

6. Man beachte, daß $\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[q]{a}$ **nicht** gleich $\sqrt[p+q]{a}$ ist.

7. Man beachte, daß $\sqrt[n]{a+b}$ **nicht** gleich $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ ist.

In § 18 ist ein Verfahren gelehrt, um die Quadratwurzel aus einer dekadisch geschriebenen Zahl wieder in dekadischer Schreibweise darzustellen. Analog kann man verfahren, um die Kubikwurzel, d. h. dritte Wurzel, aus einer gegebenen Zahl zu finden, indem man die Entwickelung von

$$(a+b+c+\ldots)^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + \ldots$$

anwendet, wie folgendes Beispiel zeigt:

Ausführlich:	Abgekürzt:
$\sqrt[3]{830584} = a + b$, wo $a = 90$, $b = 4$ ist	$\sqrt[3]{830'584} = 94$
$729000 = a^3$	729
101584	$1015'84$
$3a^2 = 24300)\ 97200 = 3a^2b$	$243)\ 972$
$4320 = 3ab^2$	432
$64 = b^3$	64
101584	101584

In ähnlicher Weise findet man die Kubikwurzel aus Buchstabenausdrücken, die vielgliedrige Summen sind.

Nach derselben Methode läßt sich auch zu jeder gegebenen Zahl die nächst kleinere Kubikzahl bestimmen. Z. B.:

$$1587^3 < 4000000000 < 1588^3,$$

woraus auch folgt:

$$158{,}7^3 < 4000000 < 158{,}8^3,$$

oder auch:

$$1{,}587^3 < 4 < 1{,}588^3.$$

Man kann deshalb jede ganze oder gebrochene Zahl, die selbst keine dritte Potenz ist, in zwei Grenzen einschließen, welche dritte Potenzen von zwei gebrochenen Zahlen sind, die sich nur um $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ oder überhaupt um einen beliebig kleinen Bruch unterscheiden (§ 18).

Wer den Kern des Verfahrens der Ausziehung der Quadratwurzel und der Kubikwurzel erkannt hat, ist imstande, aus der Entwickelung von $(a+b)^4$, von $(a+b)^5$ und überhaupt von $(a+b)^n$, wo n eine beliebige positive ganze Zahl ist, ein ähnliches Verfahren für die Ausziehung der vierten, fünften und überhaupt der n-ten Wurzel abzuleiten. Da man aber bequemere

Mittel besitzt, um die n-ten Wurzeln aus Zahlen aufzufinden (§ 26), so genügt hier die Erkenntnis, daß es möglich ist, jede ganze oder gebrochene Zahl, die selbst keine n-te Potenz ist, in zwei Grenzen einzuschließen, welche n-te Potenzen von Zahlen sind, die sich nur um einen beliebig kleinen Bruch unterscheiden. Hat man z. B. die Zahl 192 in zwei Grenzen einzuschließen, die fünfte Potenzen von Zahlen sind, die sich um $\frac{1}{100}$ unterscheiden, so findet man durch ein der Kubikwurzel-Ausziehung nachgebildetes Verfahren

zunächst: $286^5 < 1920000000000 < 287^5$

und daraus: $2{,}86^5 < 192 < 2{,}87^5$.

Die Gründe, welche in § 7, § 11, § 19 dazu führten, den Zeichen

$a - b$, wenn $b > a$ ist,

$a : b$, wenn b kein Teiler von a ist,

$\sqrt{a}$, wenn a kein Quadrat ist,

den durch die entsprechende Definitionsformel ausgesprochenen Sinn zu erteilen, zwingen uns auch, das Zeichen $\sqrt[n]{a}$, wo a keine n-te Potenz ist, in die Sprache der Arithmetik aufzunehmen, indem wir ihm den durch die Formel $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ ausgesprochenen Sinn erteilen. Ebenso erhalten dann auch $-\sqrt[n]{a}$, $b : \sqrt[n]{a}$ usw. einen leicht erkennbaren Sinn. Ferner gelten für die Wurzelform $\sqrt[n]{a}$ alle diesem Paragraphen vorangestellten Formeln, da dieselben ja nur auf die erklärende Formel $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ gestützt sind. Es ist z. B.:

1. $\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{14} = \sqrt[5]{98}$;

2. $\sqrt[6]{128} : \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{64} = 2$;

3. $\sqrt[4]{13^3} = \left(\sqrt[4]{13}\right)^3$;

4. $\sqrt{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{\sqrt{25}} = \sqrt[3]{5}$;

5. $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[3]{48} = \sqrt[15]{8^3} \cdot \sqrt[15]{48^5} = \sqrt[15]{8^3 \cdot 48^5} = \sqrt[15]{2^9 \cdot 2^{20} \cdot 3^5}$
$= 2 \cdot \sqrt[15]{2^{14} \cdot 3^5}$;

6. $3 \cdot \sqrt[3]{54} - 2 \cdot \sqrt[3]{250} = 3 \cdot \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - 2 \cdot \sqrt[3]{5^3 \cdot 2}$
$= 9\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{2}$;

7. $\left(\sqrt[5]{2} - 1\right)^3 = \sqrt[5]{8} - 3 \cdot \sqrt[5]{4} + 3 \cdot \sqrt[5]{2} - 1$;

8. $\dfrac{22}{3 - \sqrt[3]{5}} = \dfrac{22\left[3^2 + 3\sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{25}\right)\right]}{27 - 5} = 9 + 3\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}$;

9. $(\sqrt{2} - 1)\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} = \sqrt[3]{2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1}$
$= \sqrt[3]{(5\sqrt{2} - 7)(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$.

Da, wie oben gezeigt ist, die Zahl 192 zwischen $2{,}86^5$ und $2{,}87^5$ liegt, so sagt man auch, daß $\sqrt[5]{192}$ **zwischen** 2,86 und 2,87 liegt, und schreibt demzufolge

$$2{,}86 < \sqrt[5]{192} < 2{,}87.$$

Ebenso kann überhaupt $\sqrt[n]{a}$, wenn a irgend welche positive Zahl, aber keine n-te Potenz ist, in zwei

Grenzen eingeschlossen werden, deren Unterschied beliebig klein ist. Zahlen aber, welche diese Eigenschaft haben, sind schon in § 19 irrational genannt. Demnach ist $\sqrt[n]{a}$, wo a positiv, aber keine n-te Potenz ist, eine Irrationalzahl. Man kann deshalb n-te Wurzel aus a außer in Wurzelform auch numerisch angeben, indem man, der Kürze wegen, die Ungenauigkeit begeht, $\sqrt[n]{a}$ gleich einer rationalen Zahl zu setzen, die sich von ihr möglichst wenig unterscheidet. Z. B.: $\sqrt[5]{192} = 2{,}86$; $\sqrt[3]{16} = 2{,}52$; $\sqrt[10]{2} = 1{,}07$. Der positive Radikand kann selbst irrational sein. Auch dann stellt die Wurzel eine Irrationalzahl dar, z. B.:

$$\sqrt[3]{56 + 40\sqrt{2}} = 4{,}83\,.$$

Ist der Wurzel-Exponent eine negative ganze Zahl, so ergibt sich der reziproke Wert derjenigen Zahl, die entsteht, wenn der Wurzel-Exponent die entsprechende positive Zahl ist, weil $\sqrt[-n]{a} = \sqrt[+n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ ist.

Z. B.:

$$\sqrt[-4]{6\frac{26}{81}} = \sqrt[-4]{\frac{512}{81}} = \sqrt[4]{\frac{81}{512}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^9}} = \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\cdot\sqrt[4]{8}\,.$$

Bisher ist immer nur an die eine positive Zahl gedacht, welche die Gleichung $x^n = a$ befriedigt. Daß aber bei Zulassung von negativen und imaginären Werten eine solche Gleichung mehr Wurzeln haben kann, ist in speziellen Fällen schon früher erkannt. So folgt für $n = 2$, daß $x = \pm\sqrt{a}$ ist. Ferner ergeben sich für

$a = 1$ und $n = 4$ vier Werte, nämlich $x_1 = +1$, $x_2 = -1$, $x_3 = +i$, $x_4 = -i$. Ist a negativ und n gerade, so gibt es kein reelles x, das die Gleichung $x^n = a$ erfüllte, weil das Produkt einer geraden Anzahl von reellen Faktoren immer positiv werden muß. Ist a negativ und n ungerade, so gibt es eine reelle und zwar negative Zahl, welche die Gleichung erfüllt. Für $x^5 = -243$ ist dies z. B. $-\sqrt[5]{243} = -3$. Ist a positiv und n gerade, so gibt es zwei reelle Werte, die $x^n = a$ befriedigen, z. B. wird $x^6 = +64$ sowohl durch $x = +\sqrt[6]{64} = +2$, als auch durch $x = -\sqrt[6]{64} = -2$ erfüllt. Ist a positiv und n ungerade, so gibt es eine reelle und zwar positive Zahl, die $x^n = a$ befriedigt; z. B. folgt aus $x^5 = \frac{1}{1024}$, daß $x = +\frac{1}{4}$ sein kann. Um nun die Eindeutigkeit des Wurzelzeichens zu bewahren, setzen wir fest, daß unter $\sqrt[n]{a}$, wo a positiv ist, immer nur die eine positive Zahl verstanden werden soll, welche die Gleichung $x^n = a$ erfüllt. Will man aber z. B. alle Wurzeln der Gleichung $x^4 = 16$ finden, so hat man sich nicht mit der Angabe $x = \sqrt[4]{16}$ zu begnügen, sondern zu sagen, daß x vier Werte hat, nämlich $+\sqrt[4]{16} = +2$, $-\sqrt[4]{16} = -2$, $+i \cdot \sqrt[4]{16} = +2i$, $-i\sqrt{16} = -2i$.

§ 25. Potenzen mit gebrochenen und irrationalen Exponenten.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

In § 23 konnte wohl einer Potenz mit negativem ganzzahligen Exponenten schon Sinn erteilt werden, noch nicht aber einer Potenzform mit gebrochenem Exponenten, weil eine solche auf die in § 24 gelehrte Radizierung führt, wenn man ihr Sinn erteilen will. Da nämlich $\frac{p}{q} \cdot q = p$ sein soll, gemäß der Erklärung der gebrochenen Zahlen, und da $a^{nq} = (a^n)^q$ sein soll, so muß unter $a^{\frac{p}{q}}$ die Zahl verstanden werden, welche, mit q potenziert, a^p ergibt, das ist aber $\sqrt[q]{a^p}$ oder, was nach § 25 dasselbe ist, $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$. Z. B.:

$$16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8; \quad 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\frac{12}{27}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{12}.$$

Mit Hilfe der Definitionsformel $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ kann man zeigen, daß die in § 23 bewiesenen Potenzformeln auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten gelten. Z. B.:

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{v}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}} : a^{\frac{vq}{sq}} = a^{\frac{ps-vq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{v}{s}}.$$

Wenn man wünscht, mit der Potenzform $a^{-\frac{p}{q}}$ so

rechnen zu können, wie mit gewöhnlichen Potenzen, so muß man, da $-\left(\frac{p}{q}\right)\cdot q = -p$ ist, unter $a^{-\frac{p}{q}}$ die Zahl $1:\sqrt[q]{a^p}$ verstehen. Ebenso kann man auch der Wurzelform $\sqrt[\frac{p}{q}]{a}$ Sinn erteilen, wenn man beachtet, daß $\frac{p}{q}\cdot q = p$ ist und daß $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}$ ist. Man findet, daß man unter $\sqrt[\frac{p}{q}]{a}$ die Zahl $\left(\sqrt[p]{a}\right)^q$ zu verstehen hat. Ebenso findet man, daß man unter $\sqrt[-\frac{p}{q}]{a}$ die Zahl $1:\left(\sqrt[p]{a}\right)^q$ zu verstehen hat.

Am Schluß von § 24 ist festgesetzt, daß $\sqrt[n]{a}$, wo a positiv ist, nur die positive Wurzel der Gleichung $x^n = a$ bedeuten soll. Demgemäß setzen wir auch fest, daß $a^{\frac{p}{q}}$ nur die positive Wurzel der Gleichung $x^q = a^p$ bedeuten soll, wobei noch hinzugefügt werden muß, daß die Potenzform $a^{\frac{p}{q}}$ im allgemeinen nur angewandt wird, wenn a positiv ist. Daraus geht hervor, daß, wenn a und b positiv sind, man aus

$$b^q = a^p \text{ den Schluß } b = a^{\frac{p}{q}} \text{ oder auch } b^{\frac{q}{p}} = a$$

ziehen darf. Ebenso darf man nun aus

$$b^q < a^p < b^r$$

ohne weiteres schließen:

$$b^{\frac{q}{p}} < a < b^{\frac{r}{p}}$$

So kann jede positive Zahl a in zwei Grenzen eingeschlossen werden, welche Potenzen jeder anderen positiven Zahl b außer 1 sind, und zwar so, daß die Exponenten positive oder negative Brüche sind, die sich um beliebig wenig unterscheiden.

Dies zeigt die folgende Tabelle, wo $a = 3$, $b = 4$ gewählt ist.

$$3^1 < 4^1 < 3^2 \text{ gibt: } 3^{\frac{1}{1}} < 4 < 3^{\frac{2}{1}}$$

$$3^2 < 4^2 < 3^3 \text{ gibt: } 3^{\frac{2}{2}} < 4 < 3^{\frac{3}{2}}$$

$$3^3 < 4^3 < 3^4 \text{ gibt: } 3^{\frac{3}{3}} < 4 < 3^{\frac{4}{3}}$$

$$3^5 < 4^4 < 3^6 \text{ gibt: } 3^{\frac{5}{4}} < 4 < 3^{\frac{6}{4}}$$

$$3^6 < 4^5 < 3^7 \text{ gibt: } 3^{\frac{6}{5}} < 4 < 3^{\frac{7}{5}}$$

usw.

Da hiernach die Zahl 4 zwar nicht gleich einer Potenz von 3 mit rationalem Exponenten ist, wohl aber in zwei Grenzen eingeschlossen werden kann, die dies sind und die Exponenten haben, deren Unterschied beliebig klein gemacht werden kann, so sagt man, daß $4 = 3^x$ ist, wo x eine ganz bestimmte Irrationalzahl ist, deren Wert, der obigen Tabelle gemäß, zwischen $\frac{6}{5}$ und $\frac{7}{5}$, d. h. zwischen 1,2 und 1,4 liegen muß. Man operiert deshalb in der Arithmetik auch mit Potenzen, deren Exponenten irrational sind, und identifiziert eine solche Potenz mit einer Potenz, die dieselbe Basis und einen rationalen Exponenten hat, der von dem irrationalen Exponenten möglichst wenig verschieden ist. Wenn b eine positive von 1 verschiedene Zahl ist, so ist b^x immer gleich einer ganz be-

stimmten positiven Zahl, was für eine positive oder negative Zahl auch x sein mag, und zwar kann es nie zwei verschiedene Werte von x geben, die zu demselben Werte von b^x führen könnten; so daß, wenn $b^x = a$ ist, zu jedem positiven oder negativen Werte von x ein einziges positives a gehört, und umgekehrt zu jedem positiven a ein einziges x gehört, das positiv ist, wenn $a > 1$ ist, null ist, wenn $a = 1$ ist, und negativ ist, wenn $a < 1$ ist. Ist z. B. $b = 10$ und $a = 2$, so ist x eine wenig über 0,3 liegende Irrationalzahl, weil

$10^3 (= 1000)$ wenig kleiner ist als $2^{10} (= 1024)$

und daher $10^{\frac{3}{10}}$ wenig kleiner als 2 ist.

Ist $b = 10$ und $a = \frac{1}{2}$, so ist $x = -0{,}3$, weil $10^{-\frac{3}{10}}$ $= \frac{1}{1000}$ wenig größer als $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$ ist.

---

§ 26. Logarithmen.

I. $b^{\overset{b}{\log} a} = a$ **(Erklärende Formel d. Logarithmierung);**

II. $\overset{b}{\log} (b^a) = a$;

III. $\log (p \cdot q) = \log p + \log q$:

IV. $\log (p : q) = \log p - \log q$;

V. $\log (p^m) = m \cdot \log p$;

VI. $\log \sqrt[m]{p} = \frac{\log p}{m}$;

VII. $\overset{b}{\log} a = \frac{\overset{c}{\log} a}{\overset{c}{\log} b}$;

Speziell: $\overset{b}{\log} b = 1$, $\overset{b}{\log} 1 = 0$, $\overset{b}{\log} a = \frac{1}{\overset{a}{\log} b}$.

Wenn man in $b^n = a$ den Exponenten n als gesucht betrachtet, so entsteht eine zweite Umkehrung der Potenzierung, welche Logarithmierung heißt. Daß die Logarithmierung eine von der Radizierung wesentlich verschiedene Rechnungsart ist, rührt daher, daß bei der Potenzierung das Vertauschungsgesetz nicht gültig, daß also im allgemeinen p^q nicht gleich q^p ist. Wenn $b^n = a$ ist, so nennt man n den Logarithmus von a zur Basis b, geschrieben: $\overset{b}{\log} a$. Es bedeutet also $\overset{b}{\log} a$ immer den **Exponenten,** mit welchem b zu potenzieren ist, damit a herauskommt. Dies spricht die Formel I. aus. Die Richtigkeit der Formel II. ergibt sich daraus, daß $\overset{b}{\log}(b^n)$ den Exponenten bedeutet, mit dem b zu potenzieren ist, damit b^n herauskommt, und daß diese Forderung vom Exponenten n erfüllt wird. Bei der Logarithmierung nennt man die Zahl, welche ursprünglich Potenz war, Logarithmand oder Numerus, die Zahl, welche ursprünglich Potenz-Basis war, Logarithmen-Basis oder kurz Basis und das Ergebnis selbst Logarithmus. Wenn man z. B. $\overset{5}{\log} 125 = 3$ setzt, so ist dies nur eine andere Ausdrucksweise für $5^3 = 125$, und es ist deshalb 125 der Logarithmand oder Numerus, 5 die Basis, 3 der Logarithmus.

Wie jede Potenz, jede Wurzel und jeder Logarithmus noch auf zweierlei Weise anders ausgedrückt werden kann, zeigen die folgenden Beispiele, bei denen jede Gleichung die beiden in derselben horizontalen Linie befindlichen Gleichungen zur Folge hat:

$3^4 = 81,$	$\sqrt[4]{81} = 3,$	$\overset{3}{\log} 81 = 4;$
$10^{-3} = 1:1000,$	$\sqrt[-3]{1:1000} = 10,$	$\overset{10}{\log}(1:1000) = -3;$
$32^{\frac{3}{5}} = 8,$	$\sqrt[\frac{3}{5}]{8} = 32,$	$\overset{32}{\log} 8 = \frac{3}{5};$
$100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10},$	$\sqrt[-\frac{1}{2}]{\frac{1}{10}} = 100,$	$\overset{100}{\log} \frac{1}{10} = -\frac{1}{2}.$

Ferner:

$b^1 = b,$	$\sqrt[1]{b} = b,$	$\overset{b}{\log} b = 1;$
$b^0 = 1,$	$\sqrt[0]{1} = b,$	$\overset{b}{\log} 1 = 0.$

Die Erklärung des Logarithmus verleiht $\overset{b}{\log}\, y$ immer einen Sinn, wenn y gleich einer Potenz gesetzt werden kann, deren Basis b ist. Dies ist aber, wie § 25 lehrt, immer der Fall, wenn b eine von 1 verschiedene positive Zahl ist. Dort ist gezcigt, daß dann durch die Gleichung $b^x = y$ jedem reellen Werte von x ein einziger, und zwar positiver Wert von y entspricht, und daß umgekehrt jedem positiven Werte von y ein reeller Wert von x zugehört. Daher hat $\overset{b}{\log}\, y$ jedenfalls Sinn, wenn y positiv ist und b eine von 1 verschiedene positive Zahl ist, und nur unter dieser Beschränkung behandelt die elementare Mathematik die Logarithmen. Wegen der eindeutigen Zuordnung der Werte von x und von y durch $b^x = y$ kann man auch aus $p = q$ schließen, daß $\overset{b}{\log}\, p = \overset{b}{\log}\, q$ ist.

Die in § 25 enthaltene Tabelle, welche die Potenzen von 3 und von 4 miteinander vergleicht, zeigt,

wie man durch Berechnung der zweiten, dritten usw. Potenzen von 3 und von 4 rationale Werte finden kann, die dem irrationalen Werte von $\overset{3}{\log}\,4$ beliebig nahe kommen. Z. B.:

$$3^{\frac{6}{5}} < 4 < 3^{\frac{7}{5}} \text{ ergibt } \frac{6}{5} < \overset{3}{\log}\,4 < \frac{7}{5},$$

d. h. $\overset{3}{\log}\,4$ liegt zwischen 1,2 und 1,4. Ebenso kann man aus den ausgerechneten Potenzen für die Zahlen b und y den Wert von $\overset{b}{\log}\,y$ mit beliebiger Genauigkeit entnehmen. Soll man z. B. $\overset{6}{\log}\,2$ auf eine Dezimalstelle berechnen, so sucht man, zwischen welchen aufeinanderfolgenden Potenzen von 6 die Zahl $2^{10} = 1024$ liegt. Es ergibt sich $6^3 < 2^{10} < 6^4$, also $6^{\frac{3}{10}} < 2 < 6^{\frac{4}{10}}$, also $0{,}3 < \overset{6}{\log}\,2 < 0{,}4$. Die höhere Mathematik hat jedoch viel bequemere Methoden ausgebildet, um irrationale Logarithmen mit beliebiger Genauigkeit numerisch zu berechnen*).

Die Formeln III. bis VI. der Überschrift ergeben sich ohne weiteres aus den Gesetzen der Potenzierung. Um z. B. $\overset{b}{\log}\,(p \cdot q) = \overset{b}{\log}\,p + \overset{b}{\log}\,q$ zu beweisen, setze man $\overset{b}{\log}\,p = \alpha$, $\overset{b}{\log}\,q = \beta$. Dann muß $b^\alpha = p$, $b^\beta = q$ sein. Multipliziert man diese beiden Gleichungen, so erhält man, bei Anwendung der Formel II. des § 23: $b^{\alpha+\beta} = p \cdot q$, d. h. aber $\overset{b}{\log}\,(p \cdot q) = \alpha + \beta = \overset{b}{\log}\,p + \overset{b}{\log}\,q$. Sind die in einer Gleichung vorkommenden Logarithmenzeichen sämtlich auf eine und dieselbe Basis zu beziehen,

*) Daß auch elementare Mittel ausreichen, um Logarithmen zu berechnen, zeigte der Verfasser in seinem kleinen Buche: „Elementare Berechnung der Logarithmen“. (G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1903.)

so pflegt man die Angabe der Basis fortzulassen. Man schreibt also für $\overset{b}{\log}(pq) = \overset{b}{\log} p + \overset{b}{\log} q$ kürzer: $\log(p \cdot q) = \log p + \log q$. Die Formel VII. zeigt, wie man den Logarithmus einer Zahl a bei einer beliebigen Basis b finden kann, wenn man für eine andere Basis c sowohl den Logarithmus von a wie auch den von b kennt. Um diese Formel zu beweisen, gehe man von der erklärenden Formel $b^{\overset{b}{\log} a} = a$ aus und logarithmiere dieselbe nach Formel V. für die Basis c. Dann erhält man $\overset{b}{\log} a \cdot \overset{c}{\log} b = \overset{c}{\log} a$, woraus VII. durch Transponieren hervorgeht. Wenn man in VII. speziell $c = a$ setzt, so kommt $\overset{b}{\log} a = \frac{1}{\overset{a}{\log} b}$, weil $\overset{b}{\log} b = 1$ ist.

Wie mit Hilfe der Formeln III. bis VI. auch kompliziertere Ausdrücke logarithmiert werden können, zeigen folgende Beispiele:

1. $\log(a\,b\,c : d) = \log a + \log b + \log c - \log d$;

2. $\log \frac{a\,b^3}{c^2\,d^4} = \log a + 3 \log b - (2 \log c + 4 \log d)$;

3. $\log \sqrt[3]{\frac{a\,b^2}{(c+d)\,e}} = \frac{1}{3}[\log a + 2 \log b - \log(c+d) - \log e]$;

4. $\log\left[\sqrt[4]{a\,b} \cdot \sqrt[6]{c^5} \cdot \sqrt[3]{d-e}\right]$
$$= \frac{1}{4}(\log a + \log b) + \frac{5}{6} \log c + \frac{1}{3} \log(d-e).$$

Man beachte dabei namentlich, daß sich $\log(a \pm b)$ nicht durch $\log a$ und $\log b$ bequem ausdrücken läßt, daß also namentlich $\log a \pm \log b$ nicht gleich $\log(a \pm b)$, sondern gleich $\log(a \cdot b)$ bzw. $\log(a : b)$ ist.

Die Formeln III. bis VI. verwandeln das Multiplizieren in ein Addieren, das Dividieren in ein Subtrahieren, das Potenzieren in ein Multiplizieren und das Radizieren in ein Dividieren, erniedrigen also jede Rechnungsart um eine Stufe. Man wendet deshalb die Logarithmen an, um Zahlenausdrücke, deren Berechnung auf gewöhnlichem Wege sehr mühsam sein würde, auf bequemere Weise zu berechnen. Hierzu ist es aber vor allem erforderlich, daß für irgend eine Basis die Logarithmen möglichst vieler Zahlen berechnet vorliegen (Logarithmen-System). Man hat deshalb für die Basis zehn die Logarithmen aller ganzen Zahlen bis 100000 auf vier und mehr Dezimalstellen berechnet (dekadisches Logarithmen-System), tabellarisch zusammenstellt (Logarithmentafel*) und dadurch ein ausreichendes Mittel gewonnen, um den Logarithmus jeder beliebigen positiven, ganzen oder gebrochenen Zahl für jede beliebige Basis (vgl. Formel VII.) schnell angeben zu können. Da die dekadischen Logarithmen vorzugsweise im Gebrauch sind, so läßt man bei ihnen die Angabe der Basis meist fort, z. B. $\log 4 = \overset{10}{\log}\, 4 = 0{,}60206$.

Das dekadische Logarithmen-System bietet den Vorteil dar, daß man bei einer dekadisch geschriebenen Zahl schon aus der Zahl ihrer Ziffern ersehen kann, zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ihr Logarithmus liegt. Denn, wenn die Zahl a m Ziffern hat, so ist

$$10^{m-1} \lesseqgtr a < 10^m \text{, also } m - 1 \lesseqgtr \log a < m \,.$$

Man stellt deshalb die dekadischen Logarithmen immer in der Form $k + v$ dar, wo k eine ganze Zahl

*) Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen wurden vom Verfasser dieses Buches zusammengestellt und erschienen zuerst 1897 in der „Sammlung Göschen". Nach Schuberts Tode ist von diesen Tafeln im Jahre 1913 eine umgearbeitete und durch viele Tafeln stark vermehrte neue Ausgabe erschienen, die von Professor Dr. Robert Haußner in Jena herausgegeben worden ist.

ist, die positiv, null oder negativ sein kann (Kennziffer oder Charakteristik) und wo v nicht negativ und kleiner als 1 ist (Mantisse). Die Kennziffer des dekadischen Logarithmus einer ganzen Zahl oder eines Dezimalbruchs ist daher immer um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern der ganzen Zahl bzw. der Ziffern der vor dem Komma stehenden Zahl. Beginnt ein Dezimalbruch mit „Null Komma", so ist seine Kennziffer gleich minus p, wenn p — 1 Nullen auf das Komma folgen. So hat z. B. log 1896 die Kennziffer 3, log 5 die Kennziffer 0, log 0,5 die Kennziffer — 1, log 0,05 die Kennziffer — 2 usw. Da sich hiernach die Kennziffer des Logarithmus einer Zahl ohne weiteres angeben läßt, so enthalten die Logarithmentafeln nur die Mantissen der Logarithmen, und zwar in Dezimalbruchform, manche auf 4 oder 5 Dezimalstellen, manche auf 7 oder noch mehr Dezimalstellen. Bemerkenswert ist, daß je zwei Zahlen, deren Quotient eine Potenz von zehn mit ganzzahligem Exponenten ist, also auch je zwei Zahlen, die sich nur durch die Stellung des Dezimalkommas unterscheiden, eine und dieselbe Mantisse haben, z.B.: $\log 4000 = 3{,}60206$; $\log 40 = 1{,}60206$; $\log 0{,}4 = 0{,}60206 - 1$; $\log 0{,}00004 = 0{,}60206 - 5$.

Hinsichtlich der weiteren praktischen Benutzung der Tafeln muß auf diese selbst verwiesen werden.

Die logarithmische Berechnung von Zahl-Ausdrücken zeigt folgendes Beispiel:

$$x = \sqrt[5]{\frac{17{,}89 \cdot 0{,}053}{1{,}0546}},$$

$$\log x = \tfrac{1}{5}\,[\log 17{,}89 + \log 0{,}053 - \log 1{,}0546]$$

$$\begin{array}{rl}
\log 17{,}89 = & 1{,}25261 \\
\log 0{,}053 = & \underline{0{,}72428} - 2 \\
 & 1{,}97689 - 2 \\
\log 1{,}0546 = & 0{,}02284 \\
 & \underline{\quad (25)} \\
 & \underline{0{,}02309} \\
 & \underline{0{,}95380} - 1 \\
5) & \underline{4{,}95380 - 5} \\
\log x = & 0{,}99076 - 1 \;\|\; x = 0{,}97895 \\
 & \underline{\quad 074} \\
 & \quad\;\; 2
\end{array}$$

Wenn der logarithmisch zu berechnende Zahlenausdruck Plus- und Minuszeichen enthält, so müssen die durch diese Zeichen getrennten Glieder für sich berechnet werden, da für $\log(a \pm b)$ keine einfache Umformung möglich ist. Z. B.:

$$x = 6 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}\,,$$

$$\log x = \log 6 + \frac{1}{2} \log\left(2 - \sqrt{3}\right),$$

$$\begin{array}{rl||rl}
\log 3 = & \underline{0{,}47712} & 2 = & 2{,}0000 \\
2) & 0{,}23856 & \sqrt{3} = & \underline{1{,}7320} \\
 & \underline{\quad\;\; 5} & & 0{,}2680 \\
 & \quad\;\; 1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log 0{,}2680 = & \underline{0{,}42813} - 1 \\
2) & 0{,}71406 - 1 \\
\log 6 = & \underline{0{,}77815} \\
\log x = & 0{,}49221 \;\|\; x = 3{,}1061. \\
 & \underline{\quad 20} \\
 & \quad\;\; 1
\end{array}$$

Auch Gleichungen, bei denen die Unbekannte in Exponenten von Potenzen vorkommt, lassen sich häufig durch Übergang zu den Logarithmen lösen, indem solche Exponentialgleichungen dadurch auf gewöhnliche Gleichungen (§ 16 und § 21) zurückgeführt werden können. Z. B.:

1. $1{,}04^x = 2$ führt auf:
   $x \cdot \log 1{,}04 = \log 2$, also $x = \log 2 : \log 1{,}04$,
   daher $x = 0{,}30103 : 0{,}01703 = \mathbf{17{,}7}$.
2. $8^{3x+2} = 8 \cdot 512^{x+1} - 5^{x+24}$ ergibt zunächst:
   $5^{x+24} = 8 \cdot 8^{3x+3} - 8^{3x+2}$ oder:
   $5^{x+24} = 8^{3x+4} - 8^{3x+2}$ oder:
   $5^x \cdot 5^{24} = 8^{3x} \cdot 8^4 - 8^{3x} \cdot 8^2$ oder:
   $5^x \cdot 5^{24} = 8^{3x} \cdot 8^2(8^2 - 1) = 8^{3x} \cdot 64 \cdot 63$, also:
   $x \cdot \log 5 + 24 \log 5 = 3x \cdot \log 8 + \log 64 + \log 63$
   oder:
   $24 \cdot \log 5 - \log 64 - \log 63 = x(3 \cdot \log 8 - \log 5)$
   oder:
   $$x = \frac{24 \log 5 - \log 64 - \log 63}{3 \cdot \log 8 - \log 5} = \mathbf{6{,}5511}.$$

VII. Abschnitt.

Anhang.

§ 27. Bemerkungen zum systematischen Aufbau der Arithmetik.

Bei jeder der 7 in den Abschnitten II, III, VI definierten arithmetischen Rechnungsarten kann man die beiden dadurch verknüpften Zahlen als aktive

und passive unterscheiden. Man operiert mit der aktiven Zahl an der passiven Zahl, wie die folgende Tabelle zeigt, wo immer 16 die passive, 2 die aktive Zahl ist:

Die 7 Rechnungsarten.

Name der Rechnungsart:	Beispiel:	Die passive Zahl, hier 16, heißt:	Die aktive Zahl, hier 2, heißt:	Das Resultat heißt:
Addition	$16 + 2 = 18$	Augendus (Summand)	Auktor (Summand)	Summe
Subtraktion	$16 - 2 = 14$	Minuendus	Subtrahendus	Differenz
Multiplikation	$16 \cdot 2 = 32$	Multiplikandus (Faktor)	Multiplikator (Faktor)	Produkt
Division	$16 : 2 = 8$	Dividendus	Divisor	Quotient
Potenzierung	$16^2 = 256$	Basis	Exponent	Potenz
Radizierung	$\sqrt[2]{16} = 4$	Radikandus	Wurzel-Exponent	Wurzel
Logarithmierung	${}^2\log 16 = 4$	Logarithmandus	Logarithmen-Basis	Logarithmus

Wie hierbei aus jeder der drei direkten Rechnungsarten Addition, Multiplikation, Potenzierung ihre beiden Umkehrungen, die man indirekte Rechnungsarten nennt, folgen, zeigt folgende Tabelle:

Stufe	Direkte R.	Indirekte R.	Gesucht wird:
I	Addition: $5+3=8$	Subtr.: $8-3=5$	Augendus
		Subtr.: $8-5=3$	Auktor
II	Multiplikation: $5\cdot 3=15$	Divis.: $15:3=5$	Multiplikandus
		Divis.: $15:5=3$	Multiplikator
III	Potenzierung: $5^3=125$	Radiz.: $\sqrt[3]{125}=5$	Basis
		Logar.: $\overset{5}{\log}\,125=3$	Exponent

In derselben Weise, wie die Multiplikation aus der Addition, die Potenzierung aus der Multiplikation abgeleitet ist, könnte man auch aus der Potenzierung als der direkten Rechnungsart dritter Stufe eine direkte Rechnungsart vierter Stufe, aus dieser eine fünfter Stufe usw. ableiten. Doch ist schon die Definition einer direkten Rechnungsart vierter Stufe zwar logisch berechtigt, aber rechnerisch und mathematisch unwichtig, weil bereits bei der dritten Stufe das Vertauschungsgesetz ungültig wird. Um zu einer direkten Rechnungsart vierter Stufe zu gelangen, hat man a^a als Exponenten von a zu betrachten, die so entstandene Potenz wieder als Exponenten von a zu betrachten, und so fortzufahren, bis a b mal gesetzt ist. Nennt man das Ergebnis dann (a; b), so ist (a; b) die direkte Rechnungsart vierter Stufe. Elementar lassen sich für (a; b) aus den Gesetzen der Potenzierung namentlich zwei Gesetze ableiten, nämlich:

1. $(a;\, b)^{(a;\, c)} = (a;\, c+1)^{(a;\, b-1)}$;

2. Wenn $(a; \infty) = x$ ist, so ist $a = \sqrt[x]{x}$.

Wenn man, anders als soeben, a^a als Basis einer

Potenz mit dem Exponenten a betrachtet, das Ergebnis wieder als Basis einer Potenz mit dem Exponenten a und so fortfährt, bis b mal die Zahl a erschienen ist, so gelangt man zu einer Potenz, deren Basis a und deren Exponent a^{b-1} ist, also nicht zu einer neuen Rechnungsart.

Von der Zahlform $a + i b$, wo a und b positive oder negative, rationale oder irrationale Zahlen oder auch Null sind, ist in § 20 nachgewiesen, daß, wenn man sie mit einer ebensolchen Zahlform $c + i d$ durch die Rechnungsarten erster und zweiter Stufe verknüpft, das Ergebnis wiederum eine ebensolche Zahlform ist. Der Nachweis, daß das auch für die 3 Rechnungsarten dritter Stufe der Fall ist, ist mit den Mitteln der elementaren Arithmetik nicht zu führen. Es mag daher die Mitteilung genügen, daß $a + i b$ hoch $c + i d$, sowie $(c + i d)$-te Wurzel aus $a + i b$, sowie $\log(a + i b)$ zur Basis $c + i d$ sich in der Form $x + i y$ darstellen lassen. Da auch die Rechnungsarten von der höheren als der dritten Stufe und deren Umkehrungen zu keinen neuen Zahlformen führen, so haben die allmählichen Erweiterungen des Zahlbegriffs in der Zahlform $a + i b$ ihren Abschluß gefunden.

---

§ 28. Arithmetische und geometrische Reihen.

I. $z = a + (n - 1) d;$

II. $s = \frac{1}{2} n (a + z) = n \cdot a + \frac{1}{2} n (n - 1) d;$

III. $z = a \cdot q^{n-1};$

IV. $s = a \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{z q - a}{q - 1}.$

Eine arithmetische Reihe oder Progression mit der konstanten Differenz d ist eine geordnete Folge von Zahlen, in der jede Zahl, vermindert um die vorhergehende, die Differenz d ergibt, z. B.: 5, 8, 11, 14, 17, ...; 13, 8, 3, −2, −7, ...; 1, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, 4, $4\frac{3}{4}$, .. Bezeichnet a das erste Glied (Anfangsglied), so ist das zweite Glied $a + d$, das dritte $a + 2d$ usw., also das n-te (Endglied) $a + (n - 1)d$. Damit ist Formel I. bewiesen. Um die Summe der n Glieder einer arithmetischen Reihe zu finden, schreibe man unter die Summe der n Glieder in gewöhnlicher Reihenfolge ihre Summe in umgekehrter Reihenfolge. Dann haben je zwei Glieder, die in derselben Vertikalen stehen, immer dieselbe Summe, weil $a + xd$ und $z - xd$ zusammen $a + z$ ergeben. Daher ergibt sich durch Addition der beiden Reihen:

$$2 \cdot s = n \cdot (a + z),$$

woraus Formel II. folgt. Setzt man in derselben $z = a + (n - 1)d$, so ergibt sich die zweite Form der Formel II.

Da die fünf Zahlen a, d, n, z, s durch zwei Gleichungen miteinander verbunden sind, so müssen immer drei von den fünf Zahlen bekannt sein, damit sich die beiden anderen bestimmen lassen. Ist z. B. nach der Summe der zweizifferigen ungeraden Zahlen gesucht, so ist $a = 11$, $z = 99$, $d = 2$ bekannt und s gesucht. Man muß daher n aus den beiden Formeln eliminieren und dann s berechnen, oder man rechnet aus I. n aus, und benutzt den erhaltenen Wert, um aus II. s zu berechnen. So erhält man $n = 45$ und dann $s = 2475$. Die Formel I. verknüpft die 5 Zahlen a, d, n, z, s mit

Ausnahme von s, die erste Form von Formel II. mit Ausnahme von d, die zweite Form mit Ausnahme von z. So muß es also auch noch zwei Formeln geben, von denen die eine n nicht enthält, die andere a nicht enthält. Diese durch Elimination leicht ableitbaren Formeln heißen:

$$s = \frac{(z+a)(z-a+d)}{2d},$$

$$s = nz - \frac{1}{2} n(n-1)d.$$

In den beiden Fällen, wo a, s, d und wo s, d, z gegeben sind, ist die Bestimmung der beiden noch fehlenden Zahlen nur durch Auflösung einer Gleichung zweiten Grades möglich. In allen übrigen Fällen hat man nur mit Gleichungen ersten Grades zu tun.

Betrachtet man bei einer arithmetischen Reihe das erste Glied a, das letzte Glied z und die Anzahl n der Glieder als gegeben, so nennt man die Auffindung der übrigen $n-2$ Glieder „Interpolation". Aus I. ergibt sich, daß die zu interpolierenden Glieder gleich $a + \frac{z-a}{n-1}$, $a + 2 \cdot \frac{z-a}{n-1}$, $a + 3 \cdot \frac{z-a}{n-1}$ usw. sind. Sollen z. B. zwischen 0,48 und 1,80 neun Glieder interpoliert werden, so ist $d = \frac{z-a}{n-1} = \frac{1{,}80 - 0{,}48}{10} = 0{,}132$, also heißen die 9 Glieder: 0,612; 0,744; 0,876; 1,008; 1,140; 1,272; 1,404; 1,536; 1,668.

Ist x irgend ein Glied einer arithmetischen Reihe mit der konstanten Differenz d, so ist das vorhergehende Glied gleich $x - d$, das nachfolgende gleich $x + d$. Da nun $\frac{(x+d)+(x-d)}{2} = x$ ist, so gilt der Satz, daß jedes Glied einer arithmetischen Reihe arith-

metisches Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist.

Eine geometrische Reihe oder Progression mit dem konstanten Quotienten q ist eine geordnete Folge von Zahlen, in der jede Zahl, dividiert durch die vorhergehende, den Quotienten q ergibt. Z. B.: $5, 10, 20, 40, \ldots ; 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots ; \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{12}{25}, \frac{48}{125}, \ldots ; -81, +27, -9, +3, -1, +\frac{1}{3}, \ldots$ Je nachdem q positiv oder negativ ist, haben die Glieder der Reihe übereinstimmende oder abwechselnde Vorzeichen. Je nachdem ferner der absolute Wert von q größer oder kleiner als 1 ist, steigt oder fällt die Reihe. Bezeichnet a das erste Glied (Anfangsglied), so ist das zweite Glied $a \cdot q$, das dritte $a q^2$ usw., also das n-te $a q^{n-1}$. Damit ist Formel III. bewiesen. Die Summe s der ersten n Glieder ergibt sich in folgender Weise:

$$s \cdot q = a \cdot q + a q^2 + a q^3 + \ldots + a q^{n-1} + a q^n$$
$$s = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} \text{ (subtr.)}$$

$$s(q-1) = aq^n - a, \quad \text{also } s = a\frac{q^n - 1}{q-1} \text{ (Formel IV.).}$$

Die zweite Form der Formel IV. ergibt sich, wenn man aus III. $z \cdot q = a q^n$ schließt und demgemäß zq für aq^n in der eben abgeleiteten Formel setzt. Durch die beiden Formeln III. und IV. werden fünf Größen, nämlich a, q, n, z, s, miteinander verbunden. Folglich hängen zwei von den fünf Größen von den übrigen drei ab. Sind z. B. s, a, z gegeben, q gesucht, so findet man aus IV.: $q = \frac{s-a}{s-z}$. Meist ist es vorteilhaft, die Berechnungen auf logarithmischem Wege auszuführen.

Ist n gesucht, so ist man sogar **gezwungen**, zu den Logarithmen überzugehen. Es ergibt sich z. B. aus III.:

$$n = 1 + \frac{\log z - \log a}{\log q},$$

und aus IV.:

$$n = \frac{\log (sq - s + a) - \log a}{\log q}.$$

In einigen Fällen ist die Berechnung der gesuchten vierten Zahl nur durch Lösung einer Gleichung **höheren** Grades zu erzielen, z. B. wenn q aus s, a, n oder aus s, z, n berechnet werden soll.

Wenn man bei einer fallenden geometrischen Reihe, d. h. bei einer solchen, deren konstanter Quotient < 1 ist, zuerst die ersten n Glieder, darauf die ersten $n + 1$ Glieder und so weiter summiert, so erhält man Summen, welche einem bestimmten Grenzwerte zustreben. Man erhält diesen Grenzwert, wenn man in Formel IV. $n = \infty$ setzt und beachtet, daß die n-te Potenz einer Zahl, die kleiner als 1 ist, sich mehr und mehr der Null nähert, je größer n wird. So erhält man:

$$s = a\frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}.$$

Es ist z. B.:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = 1\frac{4}{9}, \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = 1\frac{13}{27},$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = 1\frac{40}{81},$$

endlich $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$ ad infinitum $= \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1\frac{1}{2}$.

---

§ 29. Zinseszins- und Rentenrechnung.

I. a Mark, einmal gezahlt, sind nach n Jahren durch Zinseszins $a q^n$ Mark;

II. r Mark, am Schluß jedes Jahres gezahlt, sind nach n Jahren zusammen $r \frac{q^n - 1}{q - 1}$ Mark.

Ein Kapital von a Mark trägt bei p Prozent in einem Jahre $\frac{a p}{100}$ Mark. Zinsen. Fügt man diese zu dem Kapitale von a Mark hinzu, so erhält man das um die Zinsen vergrößerte Kapital im Betrage von $\left(a + \frac{a p}{100}\right)$ Mark $= a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ Mark. Der Faktor $1 + \frac{p}{100}$, der hier immer mit q bezeichnet werden soll, heißt Vermehrungsfaktor. Es gilt also der Satz:

Jedes Kapital wird durch dauerndes Hinzufügen der jährlichen Zinsen in jedem Jahre ver-q-facht, wo q den Vermehrungsfaktor bedeutet, also bei p Prozent gleich $1 + \frac{p}{100}$, bei 4 Prozent gleich 1,04 ist.

Hieraus geht hervor, daß aus a Mark durch Zinseszinsen nach Ablauf eines Jahres aq Mark, nach Ablauf zweier Jahre $(aq) \cdot q$ Mark $= aq^2$ Mark, nach Ablauf dreier Jahre $(aq^2) q$ Mark $= aq^3$ Mark wird usw. Folglich ist das Kapital von c Mark (Endkapital), das aus a Mark bei p Prozent durch Zinseszins entsteht, gleich $a \cdot q^n$ Mark, wo $q = 1 + \frac{p}{100}$ ist (Zinseszinsformel).

Ist umgekehrt c, p, n gegeben, a gesucht, so erhält man:

$$a = c : q^n .$$

Diese Formeln liefern das Anfangskapital, wenn das Endkapital gegeben ist, also z. B. den heutigen Wert einer Schuld, die heut über n Jahre c Mark beträgt. Wenn a, c, n gegeben, q gesucht ist, so hat man durch Formel I. q auszudrücken. Man erhält

$$q = \sqrt[n]{\frac{c}{a}}, \quad \text{also } p = 100 \left[\sqrt[n]{\frac{c}{a}} - 1 \right].$$

Ferner findet man n aus a, c, q durch Übergang zu den Logarithmen, nämlich

$$n = \frac{\log c - \log a}{\log q}.$$

Hieraus erhält man z. B. die Zahl der Jahre, in welchen sich ein Kapital bei 4 Prozent verdoppelt, wenn man $c = 2a$ setzt. Dann kommt

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}30103}{0{,}01703} = 17{,}7, \quad \text{also in } 17\tfrac{7}{10} \text{ Jahren.}$$

Wenn alljährlich, n Jahre hindurch, am Schlusse jedes Jahres r Mark gezahlt werden, so würden hieraus, wenn gar keine Verzinsung stattfände, nach Ablauf der n Jahre natürlich $n \cdot r$ Mark entstehen. Wenn aber Zinseszins gerechnet wird, so ist zu beachten, daß die am Schlusse des ersten Jahres gezahlten r Mark zu $r \cdot q^{n-1}$ Mark, die am Schlusse des zweiten Jahres gezahlten r Mark zu $r \cdot q^{n-2}$ Mark usw. anwachsen. Also ergibt die Anwendung der Zinseszinsformel, daß der Gesamtwert der n mal, und zwar am Schlusse jedes der n Jahre gezahlten r Mark nach Ablauf der n Jahre sich auf:

$$s \text{ Mark} = (rq^{n-1} + rq^{n-2} + \ldots + rq + r) \text{ Mark}$$

beläuft. In der Klammer steht aber die Summe einer geometrischen Reihe in umgekehrter Folge der Glieder.

Das Anfangsglied heißt r, der konstante Quotient q, die Anzahl der Glieder n. Folglich ist nach Formel IV. in § 28:

$$s = r\frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ (Rentenformel).}$$

Werden die Beträge am Anfang statt am Schluß jedes Jahres gezahlt, so steht jeder Betrag ein Jahr länger auf Zinseszins, so daß jedes Glied der obigen Reihe mit q zu multiplizieren ist. Deshalb kommt in diesem Falle $q \cdot r\frac{q^n - 1}{q - 1}$ für den Gesamtwert aller n Zahlungen nach Ablauf der n Jahre. Man beachte, daß die Rentenformel den Wert einer n Jahre hindurch gezahlten Rente nach Ablauf dieser n Jahre ausdrückt, daß man aber $r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ noch durch q^n zu dividieren hat, wenn man berechnen will, was statt dieser n maligen künftigen Zahlungen bei Beginn der n Jahre zu zahlen ist (Barwert einer Rente).

Bei vielen Aufgaben kommen die Zinseszins- und die Rentenformel beide zur Anwendung. Wird z. B. gefragt, wieviel von einer Schuld, die heute 10000 Mark beträgt, nach 5 Jahren übrig geblieben ist, wenn am Schlusse jedes der 5 Jahre 1000 Mark abgezahlt werden, und wenn $4^1/_4$ Prozent gerechnet werden, so berechnet man erstens nach der Zinseszinsformel, wozu die 10000 Mark heute über 5 Jahre durch Zinseszins angewachsen wären, wenn gar keine Abzahlung stattgefunden hätte, zweitens nach der Rentenformel, was für einen Wert die 5mal gezählten Beträge von je 1000 Mark heute über 5 Jahre darstellen. Die Differenz beider Ergeb-

nisse ergibt den gesuchten Rest der Schuld, also so viel Mark, wie die folgende Zahl angibt:

$$10000 \cdot 1{,}0425^5 - 1000 \cdot \frac{1{,}0425^5 - 1}{0{,}0425}.$$

Bei der Auffindung des Ansatzes eingekleideter Renten-Aufgaben hat man zuerst darauf zu achten, ob eine angegebene Geldsumme einmal oder öfter zu zahlen ist, ob also die Zinseszins- oder die Rentenformel zur Anwendung gelangt, zweitens auch darauf zu achten, daß Leistung und Gegenleistung nur dann verglichen werden können, wenn beide für einen und denselben Zeitpunkt berechnet sind. Es sei z. B. gefragt, wieviel Mark jemand vom Jahre 1896 ab, 15 Jahre hindurch, am Schlusse jedes Jahres zu einer $3^1/_2$ Prozent rechnenden Sparkasse tragen muß, damit er von den Ersparnissen nach Ablauf der 15 Jahre noch 10 Jahre hindurch eine gleichfalls am Schlusse jedes Jahres bezogene Rente von 3000 Mark genießen könne, wenn bei dieser Rente 4 Prozent gerechnet wird. Hier erhält man, je nachdem man Leistung und Gegenleistung auf den Schluß des Jahres 1911 oder 1921 bezieht:

$$x \frac{1{,}035^{15} - 1}{0{,}035} = 3000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} : 1{,}04^{10}$$

oder: $$x \frac{1{,}035^{15} - 1}{0{,}035} \cdot 1{,}04^{10} = 3000 \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04}.$$

Beide Gleichungen sagen dasselbe aus und ergeben:

$$x = 3000 \cdot \frac{(1{,}04^{10} - 1)\, 0{,}035}{(1{,}035^{15} - 1) \cdot 1{,}04^{10} \cdot 0{,}04}.$$

Wenn, wie es bisweilen geschieht, die Hinzufügung der Zinsen zum Kapital nicht alle Jahre, sondern alle Vierteljahre oder allgemein nach je $\frac{1}{k}$ Jahr ge-

schehen soll, so hat man in n Jahren nicht n, sondern 4 n bzw. k n Termine, also in den obigen Formeln 4 n bzw. k n statt n, dafür aber auch:

$$q = 1 + \frac{p}{4 \cdot 100} \quad \text{bzw.} \quad q = 1 + \frac{p}{k \cdot 100}$$

zu setzen.

Die Formeln und Anschauungen der Zinseszins- und Rentenrechnung lassen sich auf alle Gebiete übertragen, wo in gleichen Zeitintervallen eine Vermehrung nicht nach arithmetischer, sondern nach geometrischer Progression stattfindet, namentlich also auch auf das Gebiet der Forstwirtschaft und der Bevölkerungs-Statistik.

---

§ 30. Der binomische Lehrsatz.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} b^3 + \ldots$$

Schon in § 12 ist gezeigt, wie die Entwickelung der zweiten, dritten und vierten Potenz einer Summe in eine mehrgliederige Summe lautet. Hier soll allgemein $(a+b)^n$ als Summe von Produkten dargestellt werden. Denkt man sich $(a+b)^n$ als Produkt von n Faktoren geschrieben, die sämtlich $a+b$ heißen, so übersieht man ohne weiteres, daß das Ergebnis der Multiplikation dieser n Faktoren eine Summe von Produkten sein muß, deren jedes n Faktoren besitzt, die teils a, teils b lauten. Jeder der n Faktoren $a+b$ liefert nämlich ein a oder ein b zur Bildung der Glieder dieser Summe. Das erste Glied wird a^n und zwar dadurch, daß jeder der n Faktoren $a+b$ sein a liefert. Dann

werden Glieder kommen, die gleich $a^{n-1}b$ sind, indem $n-1$ Faktoren ihr a und nur ein Faktor sein b liefert, dann Glieder, die gleich $a^{n-2}b^2$ sind, weil $n-2$ Faktoren ihr a, zwei ihr b liefern usw. Es handelt sich also nur noch darum, zu bestimmen, wie oft jedes der Glieder:

$$a^n, \quad a^{n-1}b, \quad a^{n-2}b^2, \quad a^{n-3}b^3, \ldots, b^n,$$

erscheint. Das erste Glied a^n, sowie das letzte b^n kann nur einmal erscheinen, indem jeder der n Faktoren $a+b$ sein a bzw. sein b liefert. Das zweite Glied $a^{n-1}b$ wird aber schon n mal erscheinen, weil jeder der n Faktoren $a+b$ sein b liefern kann, während die übrigen Faktoren ihr a liefern. Da das dritte Glied $a^{n-2}b^2$ dadurch entsteht, daß zwei Faktoren ihr b liefern, so muß es so oft erscheinen, als es möglich ist, aus n Dingen zwei hervorzuheben, d. h. ein Paar aus ihnen zu bilden. Diese Zahl wird z. B. bei $n=4$ gleich 6, weil jedes der vier Dinge mit jedem anderen, also mit dreien zusammengefaßt werden kann, wodurch 4 mal 3 Paare entstehen würden, wenn nicht dabei jedes Paar bei dem einen und bei dem anderen der das Paar zusammensetzenden beiden Dinge, also doppelt gezählt würde. Also ergibt sich die Hälfte von 4 mal 3 oder 6. Ebenso ergibt sich, daß das Glied $a^{n-3}b^3$ so oft erscheinen muß, als es möglich ist, aus n Dingen drei hervorzuheben usw. Bezeichnet daher das Zeichen n_p allgemein die Zahl, welche angibt, wie oft man aus n Dingen eine Gruppe von je p herausgreifen kann, so gibt n_p an, wie oft das Glied $a^{n-p}b^p$ erscheint, d. h. den Koeffizienten dieses Gliedes. Demnach ergibt sich:

$$(a+b)^n = a^n + n_1 \cdot a^{n-1}b + n_2 \cdot a^{n-2}b^2 + n_3 \cdot a^{n-3}b^3 + \ldots + n_{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

wo nun noch die Koeffizienten n_p, die man Binomial-

koeffizienten nennt, in ihrer Abhängigkeit von n und p dargestellt werden müssen.

Um n_p durch n und p auszudrücken, gehen wir schrittweise vor. Schon oben ist erkannt, daß $n_1 = n$ ist. Um n_2 zu bestimmen, beachten wir, daß jedes von den n Dingen mit jedem der $n-1$ übrigen Dinge zu einer Gruppe von zweien zusammengefaßt werden kann, und daß dabei dann jedes Paar doppelt gezählt ist. Also ist:

$$n_2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Um n_3 zu bestimmen, bezeichnen wir die zu je dreien zusammenzufassenden Dinge mit $D_1, D_2, D_3 \ldots D_n$. Dann erkennt man, daß mit D_1 so viel Gruppen von dreien anfangen müssen, wie die übrigen Dinge D_2, $D_3, \ldots D_n$ sich zu zweien zusammenfassen lassen. Dies ist aber $(n-1)_2$ mal, also nach der eben abgeleiteten Formel $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ mal. Ebensoviel Gruppen fangen mit D_2 an, ebensoviel mit D_3 usw. bis D_n. Daher ergibt sich eine Summe von n Summanden, deren jeder $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ heißt. Jedes Glied dieser Summe ist aber dreimal statt einmal gerechnet, weil beispielsweise die Gruppe $D_1 D_4 D_6$ sowohl bei D_1, wie bei D_4, wie bei D_6 gerechnet ist. So kommt schließlich:

$$n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}.$$

In derselben Weise ergibt sich n_4 als eine vierfach gerechnete Summe von n Summanden, deren jeder $(n-1)_3$ heißt, und überhaupt n_p als eine pfach gerechnete Summe von n Summanden, deren jeder $(n-1)_p$

heißt. So erhalten wir, wenn wir noch im Nenner den Faktor 1 vorsetzen, allgemein:

$$n_p = \frac{n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3\ \dots\ p}.$$

Setzt man diesen Wert von n_p in die obige Formel für die Binomialkoeffizienten ein, so ergibt sich die in der Überschrift stehende Formel, die man „binomischen Lehrsatz“ nennt.

Der binomische Lehrsatz läßt sich natürlich auch anwenden, wenn die Summanden a und b nicht einfache Buchstaben, sondern anders zusammengesetzte Zahlen oder Ausdrücke sind, wie folgende Beispiele zeigen:

1. $(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2}b^2 - \dots;$

2. $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1;$

3. $(x-2)^6 = x^6 - 6 \cdot x^5 \cdot 2 + 15 \cdot x^4 \cdot 2^2 - 20 \cdot x^3 \cdot 2^3 + 15 \cdot x^2 \cdot 2^4 - 6 \cdot x \cdot 2^5 + 2^6$
$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64;$

4. $(\sqrt{3}+1)^4 = 9 + 4 \cdot 3\sqrt{3} + 6 \cdot 3 + 4 \cdot \sqrt{3} + 1$
$= 9 + 12\sqrt{3} + 18 + 4\sqrt{3} + 1 = 28 + 16\sqrt{3};$

5. $(-1+i\sqrt{3})^3 = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot (-1)(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3$
$= -1 + 3i\sqrt{3} + 9 - 3i\sqrt{3} = 8;$

6. $\left(1+\frac{1}{10}\right)^7 = 1 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 21 \cdot \frac{1}{100} + 35 \cdot \frac{1}{1000} + 35 \cdot \frac{1}{10000} + 21 \cdot \frac{1}{100000} + 7 \cdot \frac{1}{1000000} + \frac{1}{10000000}$
$= 1 + 0{,}7 + 0{,}21 + 0{,}035 + 0{,}0035 + 0{,}00021 + 0{,}000007 + 0{,}0000001 = 1{,}9487171.$

Um Trinome oder Polynome, d. h. drei- oder vielgliedrige Summen, in die n-te Potenz zu erheben, zerlegt man dieselben zuerst in zwei Summanden und gelangt dann durch wiederholte Anwendung des binomischen Lehrsatzes zu einer klammerlosen Entwickelung. Z. B.:

$$(a + 2b - c)^4 = (a + 2b)^4 - 4 \cdot (a + 2b)^3 c + 6 \cdot (a + 2b)^2 c^2 - 4(a + 2b)c^3 + c^4 = a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4 - 4a^3c - 24a^2bc - 48ab^2c - 32b^3c + 6a^2c^2 + 24abc^2 + 24b^2c^2 - 4ac^3 - 8bc^3 + c^4$$

---

§ 31. Das Moivresche Theorem.

Wenn $x^n = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ ist, so ist:

$$x = \sqrt[n]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{k}{n}\,360^0\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{k}{n}\,360^0\right)\right].$$

Schon in § 20 ist gezeigt, wie die komplexen Zahlen von der Form $a + ib$ addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden. Hier soll nun gezeigt werden, wie sie mit einem beliebigen positiven ganzen Exponenten potenziert und radiziert werden. Um dies klar erkennen zu können, veranschaulicht man sich die komplexen Zahlen durch die Punkte einer Ebene, die man Gaußische Zahlen-Ebene nennt. Betrachtet man auf einer unbegrenzten geraden Linie irgend einen Punkt als das Bild der Zahl Null, einen zweiten Punkt als das Bild der Zahl Eins, so wird dadurch jeder Punkt der geraden Linie das Bild einer bestimmten reellen Zahl, die positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational sein kann, und unge-

kehrt muß jeder solchen Zahl ein ganz bestimmter Punkt der geraden Linie zugeordnet sein. So ist als Bild von $+2$ der Punkt anzusehen, den man erhält, wenn man von dem Bilde der Zahl 1 aus die Strecke zwischen Null und Eins aus noch einmal abträgt. Wenn man ferner die Strecke Eins-Null von Null aus nach der anderen Seite, als wo Eins liegt, abträgt, erhält man das Bild der Zahl -1. Der Halbierungspunkt der eben abgetragenen Strecke wird das Bild der Zahl $-\frac{1}{2}$ sein. Das Bild der Zahl $+\sqrt{3}$ wird man ferner erhalten, wenn man über der Strecke zwischen -1 und $+1$ ein gleichseitiges Dreieck errichtet und die Höhe desselben von Null aus nach der positiven Richtung hin abträgt. Die so mit den Bildern aller reellen Zahlen angefüllte gerade Linie heißt die reelle Zahlenachse. Da jede rein-imaginäre Zahl das Produkt einer reellen Zahl mit der imaginären Einheit $+i$ (vgl. § 20) ist, so kann man in ganz derselben Weise alle rein-imaginären Zahlen auf einer zweiten geraden Linie abbilden, die man die imaginäre Zahlenachse nennt. Sorgt man nun in einer Ebene dafür, daß eine reelle und eine imaginäre Zahlenachse sich im Bilde der Zahl Null rechtwinklig schneiden, und daß die Strecke von 0 bis $+i$ so lang wird, wie von 0 bis $+1$, so kann man jeder beliebigen komplexen Zahl $a+ib$ als Bild den Punkt zuweisen, in welchem die durch die Bilder von a und von ib gelegten, den Achsen parallelen Geraden sich schneiden. Umgekehrt muß auch dann jedem beliebigen Punkte der Ebene eine bestimmte komplexe Zahl zugehören. So entsteht die mit den Bildern aller komplexen Zahlen angefüllte Gaußische Zahlenebene:

Fällt man nun von dem Bilde P der komplexen Zahl a + ib das Lot PF auf die reelle Zahlenachse, so wird PF so viel Maßeinheiten lang, wie die Zahl b angibt, und die Strecke vom Nullpunkt bis F wird so viel Maßeinheiten lang, wie die Zahl a angibt. Das Bild P von **a + ib** kann aber eindeutig nicht allein aus a und b, sondern auch aus der Hypotenuse OP, wo O der Nullpunkt ist, und aus dem Winkel gefunden werden, den diese Hypotenuse mit der positiven reellen Richtung bildet. Dieser Umstand führt zu einer zweiten Darstellung der komplexen Zahlen durch die Maßzahl der eben erwähnten Hypotenuse, die man „Modulus" der komplexen Zahl nennt, und die Maßzahl des eben erwähnten Winkels, den man „Argument" derselben nennt. Die Elemente der Trigonometrie ergeben, daß, wenn r und φ Modulus und Argument der komplexen Zahl **a + ib** sind,

$$a = r \cdot \cos\varphi, \quad b = r \cdot \sin\varphi$$

sein muß, so daß umgekehrt

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a},$$

und $\quad a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ wird. Der Modulus r der komplexen Zahl $a + ib$ wird immer als positiv angesehen, das Argument φ liegt zwischen 0^0 und 90^0, wenn a und b beide positiv sind, zwischen 90^0 und 180^0, wenn a negativ, b positiv ist, zwischen 180^0 und 270^0, wenn a und b beide negativ sind, zwischen 270^0 und 360^0, wenn a positiv, b negativ ist. Hiernach ist für jede komplexe Zahl Modulus und Argument eindeutig bestimmt. So ist beispielsweise (siehe die Figur auf der vorigen Seite):

1. zu $+2 + 2i$ der Modulus $2\sqrt{2} = 2{,}828$, das Argument 45^0;
2. zu $-2 + 2i$ der Modulus ebenso, das Argument 135^0;
3. zu $-2 - 2i$ der Modulus ebenso, das Argument 225^0;
4. zu $+2 - 2i$ der Modulus ebenso, das Argument 315^0;
5. zu $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ der Modulus 1, das Argument 120^0;
6. zu $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ der Modulus 3, das Argument 300^0.

Um zu einer allgemeinen Regel für die Multiplikation von komplexen Zahlen, die durch Moduli und Argumente dargestellt sind, zu gelangen, multiplizieren wir

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{mit} \quad r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

wodurch wir

$$rr'[(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')]$$

erhalten. Die in den runden Klammern stehenden Ausdrücke sind aber nach dem Additionstheorem der Trigonometrie gleich $\cos(\varphi + \varphi')$ bzw. $\sin(\varphi + \varphi')$. Deshalb ergibt sich:

$$r\,r'[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')].$$

Es erscheinen also die Moduli multipliziert, die Argumente aber addiert. Multipliziert man die erhaltene komplexe Zahl, deren Modulus $r \cdot r'$ ist und deren Argument $\varphi+\varphi'$ ist, mit einer dritten komplexen Zahl $r''(\cos\varphi''+i\sin\varphi'')$, so hat man die eben erkannte Regel von neuem anzuwenden und erhält:

$$r\,r'\,r''[\cos(\varphi+\varphi'+\varphi'')+i\sin(\varphi+\varphi'+\varphi'')].$$

Da man so beliebig fortfahren kann, so ergibt sich die Regel: Beliebig viele komplexe Zahlen können multipliziert werden, indem man ihre Moduli multipliziert, ihre Argumente aber addiert und das erhaltene Produkt zum Modulus, die erhaltene Summe zum Argument des gewünschten Resultats macht.

Multipliziert man z. B. die oben unter 1, 2 und 5 genannten komplexen Zahlen, so ergibt sich als Modulus des Produkts $2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1 = 8$, als Argument $45^0+135^0+120^0=300^0$. Das Produkt wird also $8(\cos 300^0+i\sin 300^0)=8\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i=4-4i\sqrt{3}$, was auch unmittelbar erhalten werden könnte.

Wenn man die soeben abgeleitete Multiplikationsregel auf n identische komplexe Zahlen anwendet, so erhält man:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos n\varphi+i\sin n\varphi],$$

d. h. in Worten:

Eine komplexe Zahl wird mit n potenziert, indem man ihren Modulus mit n potenziert, ihr Argument aber mit n multipliziert und die erhaltene Potenz zum Modulus, das erhaltene Produkt zum Argument des gesuchten Resultats macht.

Ist z. B. $2+2i$ mit 7 zu potenzieren, so hat man zunächst den Modulus $2\sqrt{2}$ und das Argument 45^0 in der vorgelegten Zahl $2+2i$ zu erkennen.

$$(2\sqrt{2})^7 = 1024\sqrt{2}, \quad 45^0 \cdot 7 = 315^0.$$

Daher muß $(2+2i)^7 = 1024\sqrt{2}\,(\cos 315^0 + i\sin 315^0)$

oder $= 1024\sqrt{2}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} - i \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = 1024 - 1024\,i$

sein. Dasselbe ergibt sich auch nach dem binomischen Lehrsatz (§ 30), nämlich

$$(2+2i)^7 = 128(1+i)^7 = 128[1 + 7i + 21i^2 + 35i^3 + 35i^4 + 21i^5 + 7i^6 + i^7] = 128[1 - 21 + 35 - 7] + 128i[7 - 35 + 21 - 1] = 1024 - 1024i.$$

Radiziert man bei der eben gefundenen Formel für das Potenzieren einer komplexen Zahl die beiden Seiten mit n, und setzt dabei $r^n = \varrho$, $n\varphi = \vartheta$, also $r = \sqrt[n]{\varrho}$, $\varphi = \frac{\vartheta}{n}$, so erhält man bei Vertauschung der rechten und linken Seite:

$$\sqrt[n]{\varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = \sqrt[n]{\varrho}\left[\cos\frac{\vartheta}{n} + i\sin\frac{\vartheta}{n}\right].$$

Läßt man in dieser Formel ϑ um $k \cdot 360^0$ wachsen, wo k eine beliebige ganze Zahl ist, so wird die linke Seite dadurch gar nicht verändert, weil $\cos(\vartheta + k \cdot 360^0) = \cos\vartheta$ und $\sin(\vartheta + k \cdot 360^0) = \sin\vartheta$ ist. Wohl aber wird die rechte Seite dadurch immer geändert, wenn k kein Vielfaches von n ist, und zwar kann das Argument auf der rechten Seite dadurch n verschiedene Werte annehmen, nämlich:

$$\frac{\vartheta}{n},\ \frac{\vartheta}{n} + \frac{1}{n}\cdot 360^0,\ \frac{\vartheta}{n} + \frac{2}{n}\cdot 360^0, \ldots \frac{\vartheta}{n} + \frac{n-1}{n}\cdot 360^0.$$

Hieraus folgt der nachstehende Lehrsatz, den man meist das Moivresche Theorem nennt:

Die Gleichung $x^n = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ hat n Wurzeln, die sämtlich den Modulus $\sqrt[n]{\varrho}$ haben, und deren n Argumente aus $\frac{\vartheta}{n} + \frac{k}{n} \cdot 360^0$ hervorgehen, wenn man k die ganzzahligen Werte von 0 bis $n-1$ erteilt. Die Bilder der n Wurzeln in der Gaußischen Zahlenebene teilen also den um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt[n]{\varrho}$ beschriebenen Kreis in n gleiche Teile. So stellt die Abbildung der komplexen Zahlen in einer Ebene einen Zusammenhang her zwischen der Lösung der Gleichung x^n gleich einer beliebigen Zahl und dem planimetrischen Problem, einen Kreis in n gleiche Teile zu teilen oder, was dasselbe ist, ihm ein reguläres n-Eck einzuschreiben. Insbesondere lehrt Moivres Theorem auch die Lösung der Gleichung $x^n = a$, wo a eine reelle Zahl ist. Denn jede reelle Zahl a ist eine komplexe Zahl, deren Modulus a und deren Argument 0^0 oder 180^0 ist, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Für die Anwendung des Moivreschen Theorems mögen folgende Beispiele dienen:

1. $x^3 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^0 + i \sin 45^0)$, daher

$x_1 = \sqrt[6]{2} \cos 15^0 + i \cdot \sqrt[6]{2} \sin 15^0$, $x_2 = \sqrt[6]{2} \cdot \cos 135^0 + i \cdot \sqrt[6]{2} \sin 135^0$,

$x_3 = \sqrt[6]{2} \cos 255^0 + i \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sin 255^0$.

2. $x^5 = -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 120^0 + i \sin 120^0)$, daher

$x = \sqrt[5]{2} \cos 24^0 + i \cdot \sqrt[5]{2} \sin 24^0$, $x_2 = \sqrt[5]{2} \cos 96^0 + i \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sin 96^0$,

$x_3 = \sqrt[5]{2} \cos 168^0 + i \cdot \sqrt[5]{2} \sin 168^0$, $x_4 = \sqrt[5]{2} \cos 240^0 + i \cdot \sqrt[5]{2} \sin 240^0$,

$x_5 = \sqrt[5]{2} \cos 312^0 + i \cdot \sqrt[5]{2} \sin 312^0$.

---

§ 32. Kubische Gleichungen.

Wenn $x^3 + ax + b = 0$ ist, so ist: falls $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geqq 0$ ist,

$$x_1 = v + w, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(v + w) + \frac{1}{2} i \sqrt{3} \cdot (v - w),$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(v + w) - \frac{1}{2} i \sqrt{3}(v - w),$$

$$\text{wo } v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}},$$

$$w = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$ **ist (Cardanische Formel);**

falls $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \leqq 0$ ist, $x_1 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \frac{\vartheta}{3}$,

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\vartheta}{3} + 120^0\right), \quad x_3 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\vartheta}{3} + 240^0\right),$$

$$\text{wo } \cos \vartheta = \frac{-\frac{b}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^3} \text{ ist.}$$

Um die kubische Gleichung $x^3 + ax + b = 0$, wo der Koeffizient von x^2 Null ist, aufzulösen, setze man $x = v + w$ ein. Dadurch erhält man

$$(v^3 + w^3 + b) + (v + w)(3vw + a) = 0.$$

Disponiert man nun über v und w so, daß $3vw + a = 0$ wird, so muß man, um die Richtigkeit der Gleichung aufrecht zu erhalten, auch $v^3 + w^3 + b = 0$ setzen. Daraus entstehen für v und w zwei Bestimmungsgleichungen, nämlich

$$v^3 + w^3 = -b \text{ und } v \cdot w = -\frac{a}{3}.$$

Man kennt daher die Summe der Unbekannten v^3

und w^3, die gleich $-b$ ist, und ihr Produkt, das gleich $-\frac{a^3}{27}$ sein muß. Daraus folgt nach § 22:

$$v^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}, \quad w^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

Hieraus folgt der in der Überschrift genannte Wert von x_1. Die Werte von x_2 und x_3 ergeben sich, wenn man beachtet, daß die Gleichung $v^3 = f$ nicht allein die Wurzel $v_1 = \sqrt[3]{f}$ hat, sondern nach § 31 auch die Wurzeln:

$$v_2 = \sqrt[3]{f}(\cos 120^0 + i \sin 120^0) = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{f} + i \cdot \sqrt[3]{f} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ und}$$
$$v_3 = \sqrt[3]{f}(\cos 240^0 + i \sin 240^0) = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{f} - i \cdot \sqrt[3]{f} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Beachtet man dies bei den obigen Gleichungen für v^3 und w^3, und ferner, daß $v \cdot w = -\frac{a}{3}$ sein muß, so erhält man auch die in der Überschrift genannten Werte von x_2 und x_3.

Bei $\sqrt[3]{f}$ setzten wir immer stillschweigend voraus, daß f eine reelle Zahl ist, so daß die Berechnung der drei Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ praktisch nur dann ausführbar erscheint, wenn der bei v und w erscheinende Radikand positiv oder null ist, d. h. wenn $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geqq 0$ ist. In diesem Falle hat also die kubische Gleichung eine reelle Wurzel und außerdem entweder zwei konjugiert-komplexe oder zwei g l e i c h e reelle Wurzeln, je nachdem die „D i s k r i m i n a n t e" $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$ ist oder $= 0$ ist.

Wenn aber die Diskriminante $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$ ist,

so erscheint als Radikand der dritten Wurzel, die gleich v bzw. w ist, eine komplexe Zahl. Nun lehrt uns aber § 31, wie man auch in diesem Falle die drei Werte von v und von w bestimmen kann. Als Modulus ergibt sich:

$$\varrho=\sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}\right)^2}=\sqrt{-\left(\frac{a}{3}\right)^3},$$

während das Argument ϑ sich bestimmt aus

$$\cos\vartheta=\frac{-\frac{b}{2}}{\varrho}.$$

Nach § 31 ergeben sich nun für v wie für w drei Werte, nämlich:

$$v=\left\{\begin{array}{l}\sqrt[3]{\varrho}\left(\cos\frac{\vartheta}{3}+i\sin\frac{\vartheta}{3}\right)\\ \sqrt[3]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{3}+120^0\right)+i\sin\left(\frac{\vartheta}{3}+120^0\right)\right]\\ \sqrt[3]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{3}+240^0\right)+i\sin\left(\frac{\vartheta}{3}+240^0\right)\right]\end{array}\right\},$$

$$w=\left\{\begin{array}{l}\sqrt[3]{\varrho}\left(\cos\frac{\vartheta}{3}-i\sin\frac{\vartheta}{3}\right)\\ \sqrt[3]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{3}+120^0\right)-i\sin\left(\frac{\vartheta}{3}+120^0\right)\right]\\ \sqrt[3]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{3}+240^0\right)-i\sin\left(\frac{\vartheta}{3}+240^0\right)\right]\end{array}\right\}.$$

Hiernach könnte es scheinen, als ob x, das ja gleich $v+w$ ist, neun Werte erhielte. Dies ist jedoch nicht der Fall, weil $v\cdot w$, der Ableitung der Cardanischen Formel gemäß, notwendig nur gleich $-\frac{a}{3}$ werden kann.

Deshalb geben nur solche Werte von v und von w durch Addition ein richtiges x, bei denen die Summe der Argumente Null oder ein Vielfaches von 360^0 ergibt. Faßt man nur solche Werte richtig zusammen, so ergeben sich die in der Überschrift im Fall

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \overline{\overline{<}} 0$ stehenden Formeln.

1. Beispiel für $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \overline{\overline{>}} 0 : x^3 - 9x - 28 = 0$.

Es ergibt sich

$$v = \sqrt[3]{14 + \sqrt{196 - 27}} = \sqrt[3]{14 + 13} = 3,$$
$$w = \sqrt[3]{14 - 13} = 1,$$

daher:

$$x_1 = 3 + 1 = 4,$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}(3 + 1) + \frac{1}{2}(3 - 1)\,i\sqrt{3} = -2 + i\sqrt{3},$$
$$x_3 = -2 - i\sqrt{3}.$$

2. Beispiel für $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \overline{\overline{<}} 0 : x^3 - 27x + 27 = 0$.

Es ergibt sich:

$$\cos\vartheta = \frac{-\frac{27}{2}}{\left(\sqrt{+\frac{27}{3}}\right)^3} = -\frac{1}{2}, \quad \vartheta = 120^0, \quad \frac{\vartheta}{3} = 40^0,$$

also $x_1 = 6\cos 40^0 = 4{,}596$;
$x_2 = 6\cos 160^0 = -5{,}638$;
$x_3 = 6\cos 280^0 = +1{,}042$.

Die Gleichung $x^3 + cx^2 + dx + e = 0$, wo c nicht Null ist, läßt sich auf die im voranstehenden behandelte

Gestalt, wo der Koeffizient des Quadrats der Unbekannten Null ist, dadurch „reduzieren", daß $x = y - \frac{c}{3}$ eingesetzt wird. Dadurch kommt:

$$y^3 - cy^2 + \frac{c^2}{3}y - \frac{c^3}{27} + cy^2 - \frac{2}{3}c^2 y + \frac{c^3}{9} + dy - \frac{dc}{3} + e = 0$$

oder
$$y^3 + y\left(d - \frac{c^2}{3}\right) + \left(e - \frac{cd}{3} + \frac{2c^3}{27}\right) = 0 .$$

Von jedem der drei Werte, die man nach dem Obigen hieraus für y finden kann, hat man nur $\frac{c}{3}$ zu subtrahieren, um die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung zu finden. Es sei z. B.: $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$ zu lösen. Durch Einsetzen von $x = y + 1$ erhält man: $y^3 + 3y = 0$. Aus dieser Gleichung erhält man entweder durch Zerlegen in $y(y^2 + 3) = 0$ oder durch die Cardanische Formel: $y_1 = 0$, $y_2 = +i\sqrt{3}$, $y_3 = -i\sqrt{3}$, woraus folgt:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + i\sqrt{3}, \quad x_3 = 1 - i\sqrt{3} .$$

Sammlung Schubert

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände:

1 **Elementare Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. 2. Auflage. Geb. M. 2.80.

2 **Elementare Planimetrie** v. Professor W. Pflieger in Colmar i. E. Geb. M. 4.80.

3 **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Prof. Dr. F. Bohnert in Hamburg. 2. Aufl. Geb. M. 2.—.

4 **Elementare Stereometrie** von Prof. Dr. F. Bohnert in Hamburg. 2. Aufl. Geb. M. 2.40.

5 **Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen** von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg 2. Auflage. Geb. 3.60.

6 **Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. Geb. M. 4.40.

7 **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. Geb. M. 5.—.

8 **Analytische Geometrie der Ebene** von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. Geb. 6.—.

9 **Analytische Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel** von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. Geb. 4.—.

10 **Differential- und Integralrechnung I. Teil: Differentialrechnung** von Prof. Dr. W. Frz. Meyer in Königsberg. 2. Aufl. Geb. M. 9.—.

11 **Differential- und Integralrechnung II. Teil: Integralrechnung** von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. Geb. M. 10.—.

12 **Darstellende Geometrie I. Teil: Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. Geb. M. 5.—.

13 **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. 2. Auflage. Geb. M. 8.—.

14 **Praxis der Gleichungen** v. Professor Dr. C. Runge in Göttingen. Geb. M. 5.20.

15 **Einleitung in die Astronomie** von Dr. A. von Flotow in Potsdam. Mit 1 Tafel. Geb. M. 7.—.

18 **Geschichte der Mathematik I. Teil** von Professor Dr. S. Günther in München. Geb. M. 9.60.

19 **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. Geb. M. 8.—.

20 **Versicherungsmathematik** v. Dr. W. Großmann in Wien. Geb. M. 5.—.

23 **Geodäsie** von Prof. Dr. A. Galle in Potsdam. Geb. M. 8.—.

25 **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades** von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. Geb. M. 4.40.

27 **Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. Geb. M. 10.—.

28 **Geometrische Transformationen II. Teil: Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationen** von Professor Dr. Karl Doehlemann in München. Geb. M. 10.—.

29 **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen I. Teil** von Rektor Dr. Viktor Kommerell in Nürtingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Stuttgart. 2. Aufl. Geb. M. 4.80.

30 **Elliptische Funktionen I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt**

von Prof. Dr. Karl Boehm in Heidelberg. Geb. M. 8.60.

31 **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Geb. M. 8.50.

32 **Theorie und Praxis der Reihen** von Professor Dr. C. Runge in Göttingen. Geb. M. 7.—.

33 **Allgemeine Formen- u. Invariantentheorie I. Teil: Binäre Formen** von Professor Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. Geb. M. 9.60.

34 **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. Geb. M. 12.—.

35 **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** v. Prof. Dr. P H. Schoute, Groningen. Geb. M. 10.—.

36 **Mehrdimension. Geometrie II. Teil: Die Polytope** von Prof. Dr. P. H. Schoute, Groningen. Geb. M. 10.—.

37 **Lehrbuch der Mechanik I: Kinematik** von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe. Geb. M. 8.—.

38 **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung I. Teil** v. Prof. E. Grimsehl, Hamburg. Geb. M. 6.-.

39 **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr W. Voigt, Göttingen. Geb. M. 10 —.

40 **Mathematische Optik** v. Prof. Dr. J Classen in Hamburg. Geb. M. 6.—.

41 **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. Geb. M. 5.—.

42 **Theorie der Elektrizität u. d. Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus** v. Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. Geb. M. 7.—.

43 **Theorie der ebenen algebraischen Kurven höh. Ordnung** von Prof. Dr. Heinrich Wieleitner in Pirmasens. Geb. M. 10.—.

44 **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Rektor Dr. Viktor Kommerell in Nürtingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Stuttgart. 2. Aufl. Geb. M. 5.80.

45 **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** v. Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. 2. Auflage. Geb. M. 3.80.

46 **Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen** v. Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Geb. M. 4.50.

48 **Thermodynamik II. Teil** v. Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. Geb. M. 10.—.

49 **Nichteuklidische Geometrie** von Prof. Dr. H. Liebmann, München. 2. Aufl. Geb. M. 6.50.

50 **Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung** von Dr. J. Horn, Professor an der Bergakademie zu Clausthal. Geb. M. 10.—.

51 **Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil** von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. Geb. M. 8.—.

52 **Theorie der geometrischen Konstruktionen** von Prof. Aug. Adler in Wien. Geb. M. 9.—.

53 **Grundlehren der neueren Zahlentheorie** von Prof. Dr. Paul Bachmann in Weimar. Geb. M. 6.50.

54 **Analytische Geometrie auf der Kugel** von Studienrat Prof. Dr. Rich. Heger in Dresden. Geb. M. 4.40.

55 **Gruppen- und Substitutionentheorie** von Professor Dr. Eugen Netto in Gießen. Geb M. 5.20.

56 **Spezielle ebene Kurven** von Prof. Dr. Heinrich Wieleitner in Pirmasens. Geb. M. 12.—.

57 **Komplex-Symbolik** v. k. k. Leutnant Roland Weitzenböck in Linz a. D. Geb. M. 4 80.

58 **Theorie des Potentials u. der Kugelfunktionen I. Teil** von Prof. Dr. A. Wangerin, Halle a. S. Geb. M 6.60.

60 **Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen** von Dr. J. Horn, Prof. an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Geb. M. 10.—.

61 **Elliptische Funktionen II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale; Umkehrproblem** von Prof. Dr. Karl Boehm in Heidelberg. Geb. M. 5.—.

62 **Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme** von Rektor Dr. Viktor Kommerell in Nürtingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Stuttgart. Geb. M. 4.80.

63 **Geschichte der Mathematik II. Teil:** Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhund. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis von Professor Dr. H. Wieleitner in Pirmasens. Geb. M. 6.50.